



МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО
ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Управление эксплуатационной работой»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению контрольной работы по дисциплине

**«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ
И ПРОЦЕССОВ»**

Составитель: Д.В. Васильев

Самара
2022

ЗАДАНИЕ

Контрольная работа должна быть представлена в виде пояснительной записки.

Задание №1. Инновационный проект представлен следующим набором работ с заданной продолжительностью. Исходные данные с названиями и продолжительностью работ представлены в таблице 1.

При выполнении задания по вариантам продолжительность ряда работ необходимо увеличить на число равное последней цифре логина. Обучающиеся с четным шифром корректируют длительность выполнения работ с четными номерами, обучающиеся с нечетным шифром – с нечетными. Например, для логина **21-145-16** к длительности выполнения работ **2, 4, 6, 8, 10, 12** необходимо прибавить **6** дней.

Требуется:

- построить сетевой график;
- определить критический путь проекта;
- найти время завершения проекта;
- рассчитать на какое время можно отложить работу **D** без отсрочки завершения проекта в целом;
- определить можно ли отложить выполнение работы **K** без отсрочки завершения проекта в целом.

Таблица 1 – Исходные данные для выполнения задания

№ п/п	Работа	Предшествующая работа	Продолжительность работы, дней
1	A	-	2
2	B	-	2
3	C	-	3
4	D	A	5
5	E	A	2
6	F	B	3
7	G	C	3
8	H	E, F	4
9	I	E, F	3
10	M	G	4
11	N	I, M	4
12	K	D, H	5

Теоретический материал. Сетевой график – это графическое отображение логической последовательности работ с целью выполнения проекта.

Основные понятия сетевого графика:

Работа – действие или совокупность действий, необходимые для реализации проекта.

На графике работы отображены линией со стрелкой.

Событие – результаты работы, одномоментная характеристика, не имеющая ресурсных параметров.

На графике события отражаются в виде кружков или квадратов, где проставляются их номера.

Сетевой график в терминах работ и событий

Правила построения сетевого графика:

Правило №1: В сетевом графике должно быть лишь одно исходное и завершающее событие.

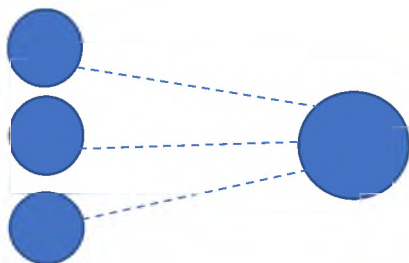


Рисунок 7 – Иллюстрация правила №1

Правило №2: В сетевом графике не должно быть замкнутых циклов, также необходимо придерживаться правильной нумерации событий сетевого графика. Пример неправильного сетевого графика приведен на рисунке 8.

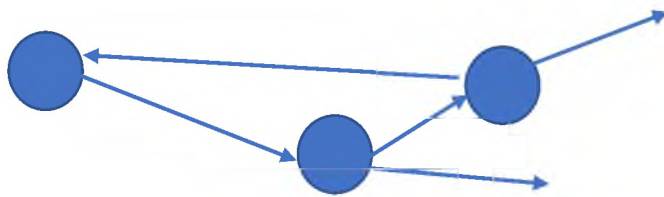


Рисунок 8 – Иллюстрация правила №2

Правило №3: Две работы и более, исходящие из одного и того же предыдущего события и входящие в одно и то же последующее, отображаются на сетевом графике с введением дополнительного события в его связке с фиктивной работой.

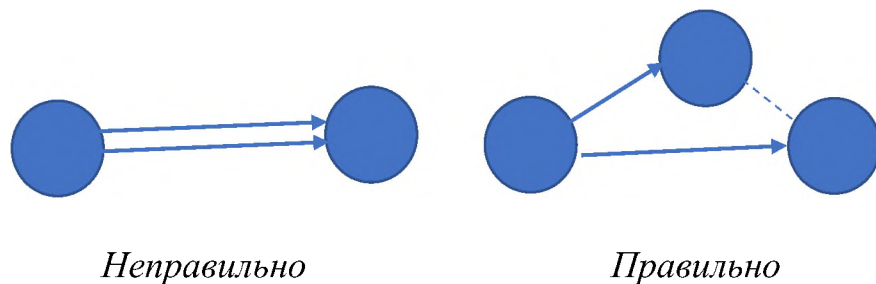


Рисунок 9 – Иллюстрация правила №3

Критический путь проекта – это $L_{кр}$ наибольший путь, соединяющий начальное и конечное события в сетевом графике, или самый продолжительный путь от исходного события к завершающему на сетевом графике. Критический путь определяет продолжительность проекта. Отображается на графике красным цветом или жирной линией.

Применение метода критического пути в построении сетевого графика

Метод критического пути (СРМ) – применяется с целью управления проектами в случае с фиксированным временем выполнения работ и позволяет ответить на вопросы:

Сколько времени необходимо для выполнения проекта в целом;

Когда будут начинаться и заканчиваться отдельные работы проекта;

Какие работы относят к критическим работам, которые должны выполняться в строго определенное графиком время;

На какое время можно отложить отдельные работы, не находящиеся на критическом пути сетевого графика.

Для определения параметров сетевого графика необходимо ввести следующие обозначения.

$t(i;j)$ – работа и ее продолжительность с начальным событием i , конечным событием j .

Ранний срок $tp(j)$ наступления события j — это самый ранний момент времени, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию

$$tp(j) = \max \{tp(i) + t(i;j)\} \quad (1)$$

Максимум принимается по всем событиям i , непосредственно предшествующим событию j .

Поздний срок $tn(i)$ наступления события i – предельный момент времени, после которого требуется столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием.

$$tn(i) = \min \{tn(j) - t(i;j)\} \quad (2)$$

Минимум принимается по всем событиям j , непосредственно следующим за событием i .

Резерв события $R(i)$ устанавливает предельно допустимый срок задержки события i без нарушения срока наступления завершающего события.

$$R(i) = t_{\Pi}(i) - t_{\Pi}(i) \quad (3)$$

Критические события резервов не имеют.

Задание №2. Решить задачу методом построения остовного дерева.

Транспортная компания отправляет различные грузы со станции **А** в адрес грузополучателей на станции **Б, В, Г, Д, Ж, З, И**.

При выполнении задания по вариантам ряд расстояний между станциями необходимо увеличить на число равное последней цифре логина. Обучающиеся с четными логинами корректируют длины ребер, выделенные черным контуром, с нечетными логинами – длины без контура. Структура транспортной сети представлена на рисунке 1.

Необходимо:

- сформируйте дорожную систему с минимальной общей длиной дорог;
- построить оптимальный маршрут доставки грузов до всех станций выгрузки;
- результаты расчёта свести в таблицу 2;
- рассчитать общую длину маршрутов.

Таблица 2 – Шаблон таблицы для представления результатов расчетов

Ребро	Длина (вес)
А-Б	
.....	
Итого	

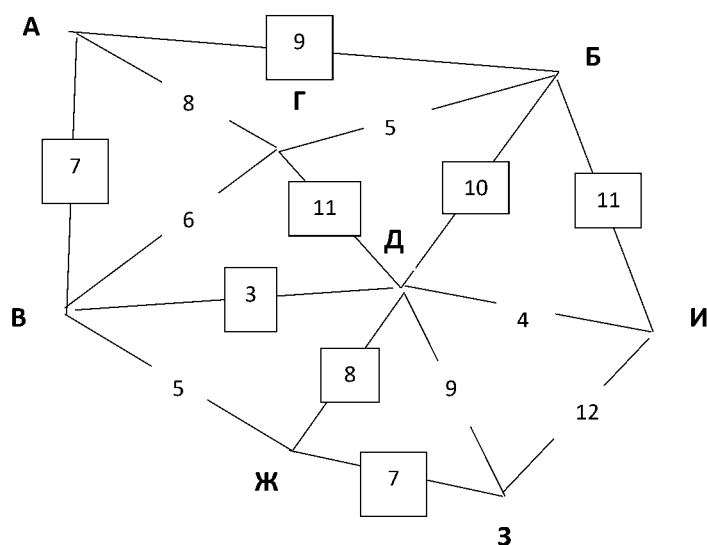


Рисунок 1 – Структура транспортной сети

Теоретический материал. Алгоритм построения минимального остовного дерева, предполагает соединения всех вершин сети с помощью путей наименьшей длины. Типичной задачей, для решения которой необходим такой алгоритм, является

проектирование сети дорог, соединяющих населенные пункты, где направления, соединяющие два каких-либо пункта, могут проходить через другие населенные пункты. Наиболее экономичный проект дорожной системы должен минимизировать общую длину дорог. Желаемый результат можно получить с помощью алгоритма построения минимального остовного дерева.

Процедура выполнения алгоритма.

Обозначим через $N=\{1,2, \dots, n\}$ множество узлов сети и введем новые обозначения:

C_k – множество узлов сети, соединенных после выполнения k -й итерации этого алгоритма.

$\overline{C_k}$ - множество узлов сети, не соединенных с узлами множества C_k после выполнения k -й итерации этого алгоритма.

Шаг 0. Полагаем $C_0 = \emptyset$ и $\overline{C_0} = N$.

Шаг 1. Выбираем любой узел j^* , из множества $\overline{C_0}$ и определяем $C_1 = \{j^*\}$, тогда $\overline{C_1} = N - \{j^*\}$. Переходим к следующему шагу $k=k+1=2$.

Шаг k. В множестве $\overline{C_{k-1}}$ выбираем узел j^* , который соединен самым коротким ребром с каким-либо узлом из множества C_{k-1} . Узел j^* присоединяется к множеству C_{k-1} и удаляется из множества $\overline{C_{k-1}}$. Таким образом $C_k = C_{k-1} + \{j^*\}$, $\overline{C_k} = \overline{C_{k-1}} - \{j^*\}$.

Если множество $\overline{C_k}$ пусто, то выполнение алгоритма заканчивается. В противном случае полагаем $k=k+1$ и повторяем последний шаг.

Задача №3. Рассчитать оптимальный план распределения порожних вагонов на полигоне дороги между грузовыми станциями **А, Б, В, Г, Д, Е, Ж**. Начальное опорное решение найти методом минимального тарифа. Решение произвести методом потенциалов. В таблице 3 показана погрузка и выгрузка на станциях.

Таблица 3 – Погрузка и выгрузка на станциях

Станции	Погрузка	Выгрузка
А	500	1100
Б	800	600
В	500	900
Г	700	400
Д	800	1200
Е	400	200
Ж	800	100

Стоимость перевозки порожнего вагона между станциями берется по таблице 4 в тыс. усл. ед. исходя из расстояния между станциями и переработкой в пути следования по ПФ. При выполнении задания по вариантам стоимость перевозки порожнего вагона в строке по вашему варианту увеличить на число равное последней цифре логина.

Таблица 4 – Стоимости перевозки порожнего вагона

Последняя цифра логина		Б	Г	Е	Ж
0, 1, 2	А	2	2	4	5
3, 4, 5, 6	В	3	2	5	7
7, 8, 9	Д	5	4	3	6

Теоретический материал. Транспортная задача – это задача линейного программирования. Это задача о наиболее экономичном плане перевозок грузов из пунктов производства (отправления) в пункты потребления (назначения). В общем виде ее можно представить таким образом: в m пунктах производства $A_1, A_2, \dots, A_m$ имеется однородный груз в количестве соответственно $a_1, a_2, \dots, a_m$. Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$ в количестве соответственно $b_1, b_2, \dots, b_n$. Стоимость перевозки 1 ед. груза из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij} . Требуется составить оптимальный план перевозок.

Решение транспортной задачи закрытого типа.

Если суммарные запасы груза равны суммарной потребности в нем, то транспортная задача называется *закрытой*.

Пример. У отправителя на станциях A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции 70, 380, 90 т. соответственно. Получатели B_1, B_2, B_3 должны получить продукцию в количестве 120, 280, 140 т. соответственно. Требуется составить оптимальный план перевозок с минимальными затратами на перевозку.

Проверяем является ли эта задача закрытой. Так как $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j$, данная транспортная задача закрытая. Найдем исходное опорное решение по методу минимального тарифа. Стоимости перевозки 1 т. груза даны в таблице 5.

Число занятых ячеек в таблице равно пяти и $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$.

Стоимость перевозки при исходном опорном решении составит.

$$L(X_1) = 70 \cdot 3 + 280 \cdot 2 + 100 \cdot 6 + 50 \cdot 4 + 40 \cdot 9 = 1930 \text{ усл. ед.}$$

Таблица 5 – Исходные данные

$a_i \backslash b_j$		1	2	3
		120	280	140
1	70	3	6	3
		70	-	-
2	380	5	2	6
		-	280	100
3	90	4	7	9
		50	-	40

Найденное исходное опорное решение проверяем на оптимальность методом потенциалов. Числа u_i и v_j называют потенциалами. Потенциалы находят из равенства $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых ячеек. Далее оценивают свободные ячейки.

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ если все оценки свободных ячеек $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорное решение является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij} \geq 0$, то опорное решение не является

оптимальным и его можно улучшить. Добавляем в таблицу столбец u_i и строку v_j . Проводим расчет потенциалов – таблица 6.

Таблица 6 – Расчет потенциалов

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	u_i
		120	280	140	
1	70	3	6	3	0
		70	-	-	
2	380	5	2	6	-2
		-	280	100	
3	90	4	7	9	1
		50	-	40	
v_j		3	4	8	

Вычисляем оценки свободных ячеек:

$$\Delta_{12} = 0 + 4 - 6 = -2 < 0 ;$$

$$\Delta_{13} = 0 + 8 - 3 = 5 > 0 ;$$

$$\Delta_{21} = -2 + 3 - 5 = -4 < 0 ;$$

$$\Delta_{12} = 1 + 4 - 7 = -2 < 0 .$$

Так как есть одна оценка $\Delta_{13} > 0$, исходное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить. Для этого надо перейти к другому опорному решению.

Для свободной ячейки с $\Delta_{ij} \geq 0$ строят цикл, углы прямые, число вершин четное. Около свободной ячейки цикла ставят знак (+), затем поочередно проставляют знаки (-) и (+). У вершин со знаком (-) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузу, стоящему со знаком (+) и отнимают от груза у вершин со знаком (-). В результате перераспределения груза получаем новое опорное решение. Это решение проверяем на оптимальность, если оно тоже не оптимально улучшаем его и т.д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

В результате постройки нескольких опорных решений и проверки их на оптимальность получаем опорное решение – таблица 7. Проверяем его на оптимальность.

Таблица 7 – Опорное решение

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	u_i
		120	280	140	
1	70	3	6	3	0
		-	-	70	
2	380	5	2	6	3
		30	280	70	
3	90	4	7	9	2
		90	-	-	
v_j		2	-1	3	

$\Delta_{11} = -1$, $\Delta_{12} = -7$, $\Delta_{32} = -6$, $\Delta_{33} = -4$. Положительных оценок нет, значит это оптимальное решение. Подсчитываем стоимость транспортных расходов.

$$L(X_{\text{опт}}) = 70 \cdot 3 + 30 \cdot 5 + 280 \cdot 2 + 70 \cdot 6 + 90 \cdot 4 = 1700 \text{ усл. ед.}$$

По сравнению с исходным опорным решением транспортные расходы уменьшились на $1930 - 1700 = 230$ усл. ед.

Выполнение работы предусматривает разработку следующих вопросов, составляющих ее содержание:

Введение;

Исходные данные;

1. Задание.

1.1 Построение сетевого графика;

1.2 Определить критический путь проекта;

1.3 Определение времени завершения проекта;

1.4 Определение на какое время можно отложить работу **D** без отсрочки завершения проекта в целом;

1.5 Определить можно ли отложить выполнение работы **K** без отсрочки завершения проекта в целом.

2. Задание.

2.1 Построение оптимального маршрута доставки грузов до всех станций выгрузки;

2.2 Расчёт общей длины маршрутов.

3. Задание.

3.1 Построение начального опорного решения методом минимального тарифа;

3.2 Решение задачи методом потенциалов.

Заключение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Исследование операций в экономике: учебник для вузов/ под редакцией Н.Ш. Кремера.— 4-е изд., перераб. и доп.— Москва: Издательство Юрайт, 2020.— 414 с.
2. Красс М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании [Текст] : учеб. для студ. вузов, обуч. по экономич. спец. и напр. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; рек. Мин. образов. РФ. — 3-е изд., испр. — М. : Дело, 2002. — 688 с.
3. Лаврусь О. Е., Кайдалова Л. В. Математическое моделирование систем и процессов: практикум для обуч. по спец. 23.05.04 Эксплуатация ж. д., специализ. «Магистральный трансп.» очной формы обучения Самара: СамГУПС, 2017.