

ЗАДАЧА 1

По стальному проводу [электрическая проводимость $\gamma = 10^7$ (Ом · м)⁻¹ ; относительная магнитная проницаемость $\mu = 10^3$] диаметром $2a = 6,04$ мм течет синусоидальный ток $I = 100$ А частотой f Гц.

Определить плотность тока на поверхности и на оси провода.

Вариант численного значения частоты тока определяется по формуле:

$$f = 1,38866 \cdot n^2 \text{ Гц},$$

где n – последняя цифра шифра студента (цифра 0 соответствует $n = 10$).

Привести вывод формул для определения плотности тока δ и напряженности H в любой точке сечения провода, не учитывая влияния обратного провода на поле в прямом проводе. При решении задачи использовать цилиндрическую систему координат.

Решение задачи следует начать с обязательной проверки соотношения между током проводимости и током смещения в данном проводнике, что является важным обоснованием для всех последующих рассуждений.

Примечание: Если две последние цифры шифра студента оканчиваются на 46, для выбора вариантов следует использовать комбинацию 64, поскольку решение на 46 полностью приведены в задании на контрольную работу в виде примеров.

Методические указания

Рассмотрим особенности распространения электромагнитной волны в проводящей среде с проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ .

Обратимся к первому и второму уравнениям Максвелла, записанным в комплексной форме для синусоидально изменяющихся во времени E и H :

$$\text{rot } H = \gamma E + j\omega\epsilon_a E \quad \text{и} \quad \text{rot } E = -j\omega\mu_a H.$$

В проводящей среде даже при очень высоких частотах произведение $\omega\epsilon_a$ много меньше проводимости γ . Поэтому с большой степенью точности слагаемым $j\omega\epsilon_a E$ в первом уравнении Максвелла для проводящих сред

можно пренебречь. Следует отметить, что в настоящее время наука не располагает точными данными о числовом значении электрической проницаемости ϵ для металлов. Имеются лишь сведения, что порядок ϵ для металлов такой же, как и для большинства диэлектриков (т.е. от нескольких единиц до нескольких десятков).

Вектор плотности тока δ , записанный в комплексной форме для синусоидально изменяющихся во времени δ и тока I , удобно направить в положительном направлении оси z , поэтому $\delta = z_0 \delta$.

Таким образом первое и второе уравнения Максвелла для проводящей среды приобретают вид:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} = \delta \quad \text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu_a \mathbf{H},$$

или, умножив последнее на γ ,

$$\text{rot } \delta = -j\omega\gamma\mu_a \mathbf{H}.$$

Возьмем ротор от последнего уравнения :

$$\text{rot rot } \delta = \text{grad div } \delta - \nabla^2 \delta = -j\omega\gamma\mu_a \delta,$$

или, считая процесс течения тока установившимся, т.е. $\text{div } \delta = 0$ и

подставляя $\delta = z_0 \delta$, перейдем к скалярному уравнению

$$\nabla^2 \delta = j\omega\gamma\mu_a \delta,$$

которое и требуется решить в цилиндрической системе координат. Учитывая вид оператора $\nabla^2 = \text{div grad}$ в этой системе координат, а также то, что δ от α и от z не зависит (из соображений симметрии), получим :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d\delta}{dr} + r \frac{d^2\delta}{dr^2} \right) = j\omega\gamma\mu_a \delta \quad \text{или} \quad \frac{d^2\delta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\delta}{dr} = j\omega\gamma\mu_a \delta.$$

Введем обозначение $q^2 = -j\omega\gamma\mu_a$, тогда уравнение примет вид :

$$\frac{d^2\delta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\delta}{dr} + q^2 \delta = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\delta}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d\delta}{d(qr)} + \delta = 0.$$

Последнее уравнение является частным случаем уравнения Бесселя относительно аргумента $x = qr$ и функции $y = \delta$. Его решение имеет вид :

$$\delta = AJ_0(qr) + BN_0(qr),$$

где A и B – постоянные интегрирования; $J_0(qr)$ – функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $N_0(qr)$ – функция Бесселя нулевого порядка второго рода. Последняя обращается в бесконечность на оси провода, т.е. при $r = 0$, хотя из очевидных физических соображений ясно, что плотность тока должна быть всюду конечна, в том числе и на оси провода. Поэтому принимаем $B = 0$. Следовательно, решение имеет вид:

$$\delta = A J_0(qr) .$$

Используя второе уравнение Максвелла, определим напряженность магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{q^2} \operatorname{rot} \delta = \alpha_0 \left(-\frac{1}{q^2} \frac{d\delta}{dr} \right) = \alpha_0 H ;$$

Отсюда

$$H = -\frac{1}{q^2} \frac{d}{dr} [A J_0(qr)] = -\frac{A}{q} \frac{d[J_0(qr)]}{d(qr)} = -\frac{A}{q} [-J_1(qr)] = \frac{A}{q} J_1(qr) ,$$

где $J_1(qr)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка.

Определим постоянную интегрирования A , для чего только что полученное выражение для H , взятое на поверхности провода (при $r = a$) приравняем к известному выражению для H из закона полного тока:

$$\frac{A}{q} J_1(qa) = \frac{I}{2\pi a} , \text{ откуда } A = \frac{qI}{2\pi a J_1(qa)} .$$

Подставим найденное значение A в полученные выше решения для δ и H :

$$\delta = \frac{qI J_0(qr)}{2\pi a J_1(qa)} ; \quad H = \frac{I J_1(qr)}{2\pi a J_1(qa)} .$$

С помощью этих формул можно определить комплекс плотности тока δ и комплекс напряженности поля H в любой точке сечения провода.

Радиус r может принимать значения от 0 до a . Для точек на оси провода $r = 0$; для точек на поверхности провода $r = a$.

Так как $J_0(0) = 1$, то плотность тока на оси провода: $\delta_0 = \frac{qI}{2\pi a J_1(qa)} .$

Введем это выражение в формулу решения: $\delta = \delta_0 J_0(qr)$.

Тогда плотность тока на поверхности провода: $\delta_a = \delta_0 J_0(qa)$.

Очевидно, что произведение qr есть комплексное число:

$$qr = r \sqrt{\omega \gamma \mu_a} \sqrt{-j}.$$

Бесселевы функции от комплексного аргумента также являются комплексными и могут быть представлены в показательной форме:

$$J_0(qr) = b_0 e^{j\beta_0}; \quad J_1(qr) = b_1 e^{j\beta_1},$$

где b_0 – модуль, а β_0 – аргумент функции $J_0(qr)$; b_1 – модуль, а β_1 – аргумент функции $J_1(qr)$, которые определяются по значению $r \sqrt{\omega \gamma \mu_a}$ с помощью Табл.1. При составлении этой таблицы наличие множителя $\sqrt{-j}$ в составе аргумента qr уже учтено.

Таблица 1

Таблица модулей и аргументов функций $J_0(qr)$ и $J_1(qr)$

$r \sqrt{\omega \gamma \mu_a}$	b_0	β_0 , град	b_1	β_1 , град
0	1	0	0	- 45,00
1	1,015	14,22	0,501	- 37,84
2	1,229	52,28	1,041	- 16,73
3	1,95	96,52	1,80	15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45
7	21,548	260,29	20,50	173,51
8	40,82	300,92	39,07	213,69
9	77,96	341,52	74,97	253,95
10	149,8	382,10	144,58	294,27

Пример решения

Пусть последняя цифра шифра студента $n = 6$.

1. Определим, во сколько раз ток проводимости в стали будет больше тока смещения. Положим: $\varepsilon = 10$; $\omega = 100$ рад / с. Тогда отношение:

$$\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{10^7}{100 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 10} = 1,129 \cdot 10^{15},$$

где электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ Ф / м .

Увеличение частоты ω даже на несколько порядков не существенно скажется на результате, а именно: в проводнике ток проводимости во много раз больше тока смещения.

2. Определим частоту переменного тока $f = 1,38866 \cdot 6^2 = 49,992$ Гц.

3. Рассчитаем параметр $\sqrt{\omega \gamma \mu_a} = \sqrt{2 \pi f \gamma \mu_a} = \sqrt{2 \pi f \gamma \mu_0 \mu} =$
 $= \sqrt{2 \pi \cdot 49,992 \cdot 10^7 \cdot 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3} = 1986,76 \text{ м}^{-1}$. Здесь учтено, что $\omega = 2 \pi f$, μ_a
 $= \mu_0 \cdot \mu$ и что $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$;

4. Комплексная величина $q = 1986,76 \sqrt{-j} = 1986,76 e^{-j 45^\circ}$;

5. Выражение $a \sqrt{\omega \gamma \mu_a} = 0,00302 \cdot 1986,76 = 6,000$.

6. По табл. 1 найдем:

$$J_0(qa) = J_0(6 \sqrt{-j}) = 11,501 e^{j 219,62^\circ}; \quad b_0 = 11,501; \quad \beta_0 = 219,62^\circ;$$

$$J_1(qa) = J_1(6 \sqrt{-j}) = 10,850 e^{j 133,45^\circ}; \quad b_1 = 10,850; \quad \beta_1 = 133,45^\circ;$$

$$J_0(0) = 1 e^{j 0^\circ}; \quad b_0 = 1; \quad \beta_0 = 0^\circ;$$

$$J_1(0) = 0 e^{-j 45^\circ}; \quad b_1 = 0; \quad \beta_1 = -45,00^\circ.$$

7. Определим плотность тока на оси провода:

$$\delta_0 = \frac{qI}{2\pi a J_1(qa)} = \frac{1986,76 e^{-j 45^\circ} \cdot 100}{2\pi \cdot 0,00302 \cdot 10,850 e^{j 133,45^\circ}} = 96,500 \cdot 10^4 e^{-j 178,45^\circ} \text{ А/м}^2.$$

8. Определим плотность тока на поверхности провода:

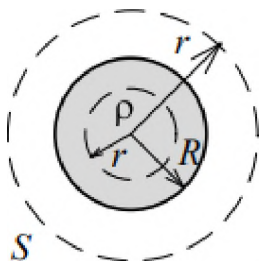
$$\delta_a = \delta_0 J_0(qa) = 96,5 \cdot 10^4 e^{-j 178,45^\circ} \cdot 11,501 e^{j 219,62^\circ} =$$

$$= 1109,85 \cdot 10^4 e^{j 41,17^\circ} \text{ А/м}^2$$

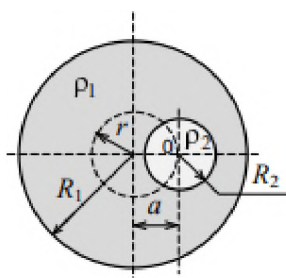
Задача 2.

Вариант задания выбирается по последней цифре шифра студента.

1. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 3$ МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 7$. Определите приращение ее длины волны.
2. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной и изотропной среде $\varepsilon = 2$ и $\mu = 1$. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 12$ В/м. Определите: фазовую скорость волны; амплитуду напряженности магнитного поля волны.
3. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна, падающая перпендикулярно поверхности тела, которое ее полностью поглощает. Определите давление, оказываемое волной на тело, если амплитуда магнитного поля электромагнитной волны равна $0,2$ А/м.
4. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 550$ нм движется в вакууме со скоростью $v = 0,2$ с по направлению к наблюдателю. Определите длину волны, которую зафиксирует приемник наблюдателя.
5. Объемный заряд распределен равномерно с плотностью ρ внутри непроводящей сферы радиуса R . Определить напряженность поля E внутри $r < R$ и вне $r > R$ сферы (r – координата сферической системы). Проницаемость среды всюду ε_a .



6. Протяженные цилиндрические оболочки радиусами R_1 и R_2 с параллельными осями заполнены ионизированным газом с объемной плотностью зарядов ρ_1 и ρ_2 , соответственно. Найти напряженность поля и потенциал на оси малого R_2 цилиндра (точка 0), если расстояние между осями равно a .



7. Полагая поверхность земли сферически радиусом R , определить напряженность поля на высоте $h = 1$ км, принимая плотность зарядов на ее поверхности $\sigma = -2,66 \cdot 10^{-9}$ Кл/м², а объемную плотность зарядов нижних слоев атмосферы - $\rho = -1,8 \cdot 10^{-12}$ Кл/м³.
8. Определить потенциал поля на оси равномерно заряженного диска радиусом $R = 3$ см с плотностью зарядов $\sigma = 0,885 \cdot 10^{-9}$ мкКл/м², если окружающая среда – воздух. Ответ дать для точки, удаленной от центра диска на расстояние $h = 4$ см.
9. Плоский конденсатор с пластинами площадью $S = 10$ см² и расстоянием между ними $d = 0,5$ см подключен к источнику напряжением $U = 10$ кВ. Определить силу притяжения пластин конденсатора друг к другу, если относительная диэлектрическая проницаемость изоляции $\epsilon = 5$.
10. Найти угол α_2 , под которым линии магнитной напряженности поля **H** выходят из ферромагнитной среды с абсолютной магнитной проницаемостью $\mu_{1a} = 10^4 \mu_0$ в среду с магнитной проницаемостью $\mu_{2a} = \mu_0$, если в среде с μ_{1a} угол $\alpha_1 = 89^\circ$.

