

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА (МИИТ)»
(РУТ (МИИТ))**

Одобрено кафедрой
«ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНАЯ АВТОМАТИКА ТЕЛЕМЕХАНИКА И СВЯЗЬ»

Протокол № _____ от _____ 201 ____ г.

Автор: к. т. н., доцент Неваров П. А.

**ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ С МЕТОДИЧЕСКИМИ
УКАЗАНИЯМИ**

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«Электромагнитные поля и волны»

Уровень ВО: *Бакалавриат*

Форма обучения: *Заочная*

Курс: *3*

Специальность/Направление: *11.03.02 Инфокоммуникационные технологии
и системы связи (ИТб)*

Специализация/Профиль/Магистерская программа: *(ИТ) Оптические
системы и сети связи*

ЗАДАЧА 1

Поперечные размеры прямоугольного волновода по осям x и y соответственно A и B см² ($A \leq B$), а вдоль направления оси z он неограниченно протяжен.

Какие типы электромагнитных волн H (т.е. TE) могут распространяться по этому волноводу в направлении оси z при длине волны в свободном пространстве $\lambda = 10$ см?

Определить длину волны Λ , распространяющейся по волноводу.

Установить справедливость следующих соотношений:

$$\lambda_z < \lambda < \Lambda; \quad v_\phi > v; \quad \Lambda \cdot \lambda_z = \lambda^2; \quad v_\phi \cdot v_z = v^2;$$

где v – скорость волны в свободном пространстве;

v_ϕ – фазовая скорость в направлении z ;

v_z – скорость распространения сигнала, энергии в направлении z .

Определить: λ_z ; частоту электромагнитных колебаний f , считая что $v=c$ – скорости света в вакууме; v_ϕ ; v_z .

Размер A волновода определяется по предпоследней значащей цифре шифра (нули опускаются), размер $B = 9$ см. для всех вариантов.

Примечание: Если две последние цифры шифра студента оканчиваются на 46, для выбора вариантов следует использовать комбинацию 64, поскольку решение на 46 полностью приведены в задании на контрольную работу в виде примеров.

Методические указания

Рассмотрим прямоугольный волновод с размерами A и B по осям x и y (пусть $A \leq B$), неограниченно протяженный в направлении z . Начало декартовой системы координат расположим на одном из ребер волновода. В случае волны, распространяющейся в сторону $+z$, возможные решения для электрической составляющей электромагнитного поля имеют вид:

$$E_x = E_1 \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot e^{-jk_z z};$$

$$E_y = E_2 \sin(k_x x) \cdot \cos(k_y y) \cdot e^{-jk_z z};$$

$$E_z = E_3 \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot e^{-jk_z z}.$$

Необходимо помнить граничные условия для идеально проводящих стенок волновода: касательная к поверхности составляющая вектора напряженности электрического поля и нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля на идеально проводящей поверхности равны нулю, а касательная к поверхности составляющая вектора напряженности магнитного поля и нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля на идеально проводящей поверхности имеют экстремумы. Предложенные решения удовлетворяют этому в случае, если составляющие волнового вектора $\mathbf{k}$ будут иметь следующие значения:

$$k_x = l\pi/A; \quad k_y = m\pi/B.$$

При этом должно выполняться $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = (2\pi/\lambda)^2$

Для того чтобы электромагнитные волны распространялись в направлении z без затухания, необходимо, чтобы k_z было вещественным, т.е. чтобы выполнялось неравенство

$$k_z^2 = (2\pi/\lambda)^2 - (l\pi/A)^2 - (m\pi/B)^2 > 0$$

Последнее условие показывает, что в волноводу могут распространяться колебания, длина волны которых в свободном пространстве меньше некоторого критического значения ($k_z = 0$):

$$\lambda < \lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(l/A)^2 + (m/B)^2}}.$$

Критическая длина волны зависит от типа устанавливающегося поля, определяемого характеристическими числами l и m . Если $A < B$, то наибольшее значение критической длины волны соответствует числам $l = 0$ и $m = 1$ (оба числа не могут одновременно обращаться в нуль).

При этом

$$\lambda_{кр} = 2B.$$

Зная k_z – ю составляющую волнового вектора, находим длину волны, распространяющейся по волноводу,

$$\Lambda = 2\pi/k_z.$$

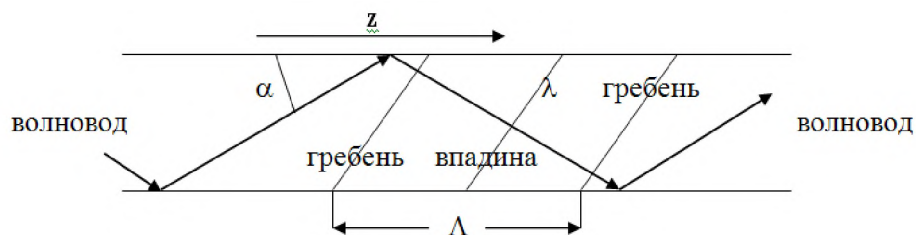
Сопоставляя полученные соотношения, можно заключить, что эта длина всегда больше длины λ свободной волны, поскольку

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}.$$

Соответственно фазовая скорость волны, распространяющейся в волноводу, v_ϕ всегда больше скорости в свободном пространстве

$$v_\phi = \Lambda f > v = \lambda f.$$

Схематически соотношение между λ и Λ показано на рисунке, где изображена волна, распространяющаяся по волноводу (ее два гребня и впадина) и многократно отражающаяся от нижней и верхней стенок.



Длина волны λ соответствует расстоянию между гребнями вдоль ломаной прямой траектории движения волны. Длина волны в волноводу Λ показана на рисунке. На рисунке не изображена λ_z , которая показывает, насколько продвигается гребень вдоль направления z . Этот путь меньше не только длины Λ , но и длины свободной волны λ , поскольку является проекцией последней на ось z . С ростом угла α растет длина волны в волноводу, но уменьшается продвижение в направлении оси z за один период, т.е. длина λ_z . Поскольку $\lambda_z = \lambda \cos \alpha$ и $\Lambda = \lambda / \cos \alpha$, то перемножая эти выражения почленно получим простое соотношение между тремя длинами волн:

$$\Lambda \lambda_z = \lambda^2.$$

Если разделить обе части равенства на T^2 , то получим соотношение для скоростей:

$$v_\phi v_z$$

где v - скорость волны в свободном пространстве;

v_ϕ - фазовая скорость в направлении z ;

v_z - скорость распространения сигнала, энергии в направлении z .

Множество разных типов волн в волноводах, описываемых в самой общей форме приведенными выше решениями для электрической составляющей поля и уравнением Максвелла $\mathbf{H} = (\mathbf{j} / \omega \mu_0) \text{rot } \mathbf{E}$ для его магнитной составляющей, разделяются на два класса. К одному относятся волны, не имеющие продольной, т.е. z -й, составляющей электрического вектора ($E_z = 0$); их называют поперечноэлектрическими ТЕ или магнитными Н. К другому классу относятся волны, не имеющие продольной магнитной составляющей; их называют поперечномагнитными ТМ или электрическими Е.

Дальнейшая классификация типов электромагнитных волн в волноводу определяется значениями характеристических чисел; говорят о волне TE_{lm} , если в ней $E_z = 0$, а характеристические числа имеют значения l и m , или о волне TM_{lm} , если $H_z = 0$.

Так например, электрический вектор простейшей волны типа TE_{01} определяется формулой:

$$E = E_x = E_1 \sin(\pi y / B) e^{-jk_z z} \quad (E_y = E_z = 0),$$

а магнитный вектор имеет y -ю и z -ю составляющие:

$$\mathbf{H} = [k_z E_1 \sin(\pi y / B) \mathbf{y}_0 - j k_y E_1 \cos(\pi y / B) \mathbf{z}_0] e^{-jk_z z} / \omega \mu_0,$$

как это следует из условия $k_x = 0$, поскольку $l = 0$ и $k_y = \pi / B$, поскольку $m = 1$.

Для волн типа TE_{02} картина поля отличается тем, что вдоль оси y укладывается не одна полуволна синусоиды E_x (и соответствующего магнитного поля), а две.

Пример решения

Пусть предпоследняя цифра шифра студента $n = 4$. Таким образом размер $A = 4$ см.

1. Поперечные размеры волновода 4×9 см². По формуле для $\lambda_{кр}$, полагая $A = 4$ см и $B = 9$ см находим ряд значений $\lambda_{кр}$ для разных значений l и m :

$l m$	0 1	0 2	1 0	1 1	1 2	2 0	2 1
$\lambda_{кр}, \text{ см}$	18	9	8	7,31	5,98	4	3,9

Следовательно, по волноводу могут распространяться только волны типа TE_{01} , для которых $\lambda = 10 \text{ см} < \lambda_{кр} = 18 \text{ см}$.

2. Определим длину электромагнитной волны Λ , распространяющейся по волноводу:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{1 - \left(\frac{10}{18}\right)^2}} = 12 \text{ см}.$$

3. Определим $\lambda_z = \frac{\lambda^2}{\Lambda} = \frac{10^2}{12} = 8,33 \text{ см}$. Убедимся в справедливости соотношения между тремя длинами волн :

$$\lambda_z = 8,33 \text{ см} < \lambda = 10 \text{ см} < \Lambda = 12 \text{ см}.$$

4. Частота электромагнитных колебаний, при условии $v = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ (скорость света в вакууме и воздухе):

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,1} = 3 \cdot 10^9 \text{ Гц} = 3 \text{ ГГц}.$$

5. Определим $v_\phi = \Lambda \cdot f = 0,12 \cdot 3 \cdot 10^9 = 3,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

6. Определим $v_z = \frac{c^2}{v_\phi} = \frac{(3 \cdot 10^8)^2}{3,6 \cdot 10^8} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, или $v_z = \lambda_z \cdot f = 0,0833 \cdot 3 \cdot 10^9 = 2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Убедимся в справедливости соотношения между тремя скоростями распространения волны :

$$v_z = 2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с} < v = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} < v_\phi = 3,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

ЗАДАЧА 2

Какую максимальную мощность можно передавать по волноводу предыдущего примера (прямоугольный волновод размера $A \times B \text{ см}$) при $\lambda = 10 \text{ см}$?

Можно считать, что предел мощности определяется электрической прочностью воздуха : напряженность электрического поля должна быть всего порядка 5 кВ/см , для того, чтобы существовал достаточный запас прочности.

Предполагается отсутствие отраженных волн вдоль оси z .

Изобразить структуру простейшей волны ТЕ в прямоугольной декартовой системе координат, в проекциях на плоскости xOy и yOz .

Примечание: Если две последние цифры шифра студента оканчиваются на 46, для выбора вариантов следует использовать комбинацию 64, поскольку решение на 46 полностью приведены в задании на контрольную работу в виде примеров.

Методические указания

Определив тип простейшей ТЕ электромагнитной волны, распространяющейся по волноводу в предыдущей задаче, следует определить и все комплексные составляющие ее электрического вектора, т.е. E_x , E_y , E_z , что и сделано в конце методических указаний к задаче 2. Магнитное поле этой волны легко найти по уравнению Максвелла

$$\mathbf{H} = (\mathbf{j} / \omega \mu_0) \text{rot } \mathbf{E}$$

и это необходимо сделать вручную, используя выражение для оператора rot в декартовой системе координат (см. Приложение). Результат следует сравнить со значением, полученным в предыдущей задаче.

Продольная составляющая вектора Пойнтинга $P_z = E_x \cdot H_y^*$ является вещественной величиной, имея размерность кВт/см^2 . Искомая мощность определяется интегрированием P_z по всему сечению волновода.

Пример решения

Положим, что поперечные размеры волновода $4 \times 9 \text{ см}^2$.

1. Для волны типа TE_{01} магнитный вектор имеет y и z – составляющие.

Интересующая нас y – составляющая :

$$H_y = k_z E_1 \sin(\pi y / B) \cdot e^{-jk_z z} / \omega \mu_0.$$

Ее комплексно сопряженное значение определяется сменой знака у мнимой единицы (j) и сопряжением комплексной величины E_1 :

$$H_y^* = k_z E_1^* \sin(\pi y / B) \cdot e^{jk_z z} / \omega \mu_0.$$

2. Продольная составляющая вектора Пойнтинга является вещественной величиной :

$$\begin{aligned} P_z &= E_x \cdot H_y^* = E_1 \sin(\pi y / B) e^{-jk_z z} \cdot k_z E_1^* \sin(\pi y / B) \cdot e^{jk_z z} / \omega \mu_0 = \\ &= (k_z / \omega \mu_0) E_1^2 \sin^2(\pi y / B). \end{aligned}$$

Определим k_z из выражения $k_z^2 = (2\pi/\lambda)^2 - (l\pi/A)^2 - (m\pi/B)^2$, при $l = 0$ и $m = 1$ и $\lambda = 10$ см:

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{9}\right)^2} = 0,522 \text{ см}^{-1}.$$

При $E_1 = 5000 \text{ В/см} = 5 \text{ кВ/см}$, $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} \text{ Гн/см}$, получим:

$$P_z = \frac{0,522 \cdot 5^2 \cdot 10^6}{4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 6\pi \cdot 10^9} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{9}y\right) = 55,1 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{9}y\right) \text{ кВт/см}^2.$$

3. Интегрируя по всему сечению волновода, находим мощность:

$$P = \int_0^A \int_0^B P_z dx dy = \int_0^A \int_0^9 55,1 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{9}y\right) dx dy = 55,1 \cdot 4 \int_0^9 \sin^2\left(\frac{\pi}{9}y\right) dy.$$

Используя замену переменной $\alpha = \frac{\pi}{9}y$, получим

$$P = \frac{55,1 \cdot 4}{\frac{\pi}{9}} \int_0^9 \sin^2\left(\frac{\pi}{9}y\right) d\left(\frac{\pi}{9}y\right) = \frac{55,1 \cdot 36}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{55,1 \cdot 36}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 991,8 \text{ кВт}.$$

В реальных установках для радиолокации мощности в импульсе достигают величин такого порядка.

4. На рис. 1 представлена структура волны TE_{01} . На рис. 2 картина электрического поля для этой волны для какого-то момента времени t представлена более наглядно. С течением времени вся картина переносится в положительном направлении оси z со скоростью $v_\phi = \Lambda \cdot f$.

Уровень сетки, представленной на рисунке, показывает мгновенное значение вектора $E = E_x$. Значение напряженности поля в заданный момент времени отрицательно там, где сетка ниже нулевого уровня. Сетка имеет нулевой уровень около боковых стенок волновода ($y = 0$ и $y = B$), где по условию $E_x = 0$. Расстояние между двумя ближайшими вершинами сетки (вдоль оси z) и представляет собой длину волноводной волны Λ . На рис. 3 для сравнения представлена структура волны TE_{02} , где, как уже было сказано выше, картина поля отличается тем, что вдоль оси y укладывается не одна полуволна синусоиды E_x (и соответствующего магнитного поля), а две, как это и показано на рисунке.

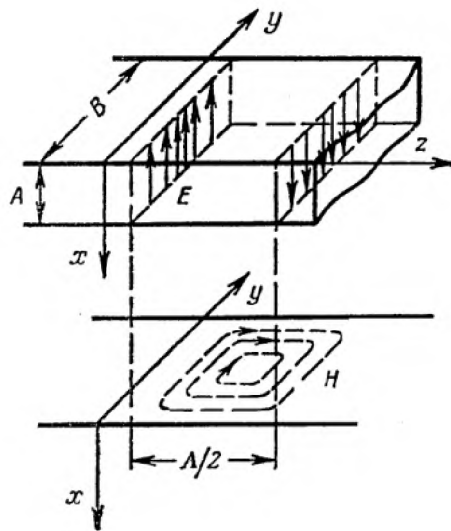


Рис. 1

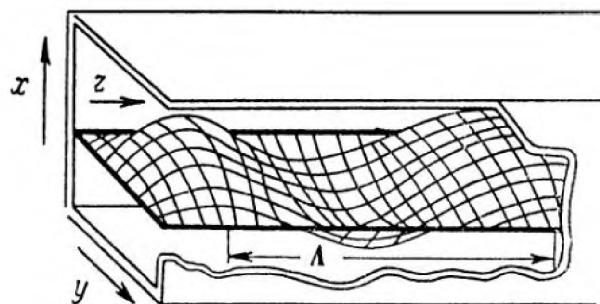


Рис. 2

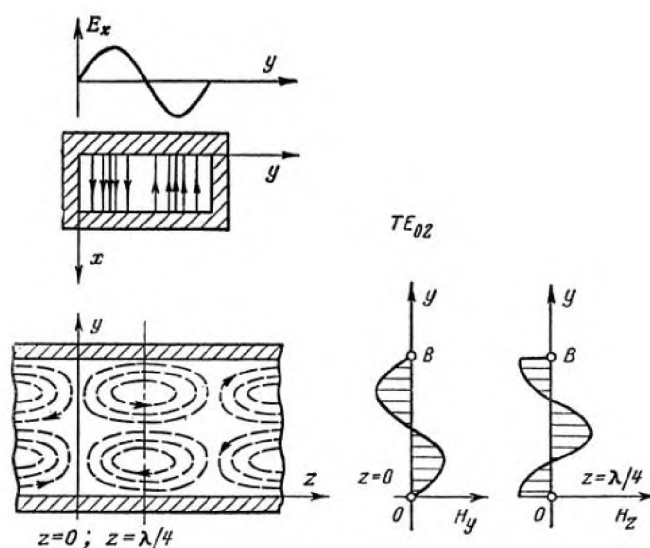


Рис. 3

Для сокращения записи различных операций над скалярными и векторными величинами употребляется дифференциальный оператор Гамильтона ∇ (оператор набла), который определяется как сумма частных производных по трем координатным осям, умноженным на соответствующие единичные векторы (орты). Функцию, к которой хотят применить эту операцию пишут справа от оператора набла.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Операция	Символическая запись	Декартовы координаты x, y, z . Орты: $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$	Цилиндрические координаты r, α, z . Орты: $\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\alpha}_0, \mathbf{z}_0$
$\text{grad } \varphi$	$\nabla \varphi$	$\mathbf{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$	$\mathbf{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$
$\text{div } \mathbf{F}$	$\nabla \mathbf{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
$\text{rot } \mathbf{F}$	$\nabla \times \mathbf{F}$	$\begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} \mathbf{r}_0 & \boldsymbol{\alpha}_0 & \frac{1}{r} \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & F_\alpha & F_z \end{vmatrix}$
$\text{div grad } \varphi$	$\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$