

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА (МИИТ)»
(РУТ (МИИТ))

Кафедра: «Теоретическая и прикладная механика»
(название кафедры)

Авторы: Мицкевич В.Г., к.тех.н, профессор; Хакимзянов Р.Р., д-р.тех.н, профессор; Маштаков А.П., к.тех.н, доцент
(ф.и.о., ученая степень, ученое звание)

Курс лекций

«Соппротивление материалов»

(название дисциплины)

Направление/специальность:
(код, наименование специальности /направления)

Профиль/специализация:
Квалификация выпускника:
Форма обучения:

Одобен на заседании Учебно-методической комиссии РОАТ Протокол № « » _____ 201_ г. Председатель УМК _____ (подпись, Ф.И.О.)	Одобен на заседании кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Протокол № _____ « » _____ 201_ г. Зав. кафедрой _____ С.А. Синицын (подпись, Ф.И.О.)
---	--

Москва 20 ____ г.

Лекция 1. Основы сопротивления материалов

В процессе эксплуатации машин и механизмов всякий элемент конструкции в результате действия на него внешних сил изменяет в той или иной степени свои первоначальные размеры и форму, т. е. *деформируется*. Указанные изменения могут привести либо к разрушению элемента, либо к недопустимому искажению его формы и размеров. Чтобы этого не произошло, необходимо правильно выбрать материал и поперечные размеры для каждого элемента конструкции в зависимости от характера действующих сил и условий эксплуатации. Основания для решения поставленной задачи дает наука о *сопротивлении материалов*, в которой изложены инженерные методы расчета элементов сооружений и машин на прочность, жесткость и устойчивость.

Под *прочностью* понимают способность конструкции, а также ее частей и деталей, выдерживать, не разрушаясь, действие внешней нагрузки.

Под *жесткостью* подразумевают способность конструкции и ее элементов сопротивляться изменению своих первоначальных размеров и формы.

Расчеты на прочность и жесткость являются основными видами расчетов, изучаемых в курсе сопротивления материалов. Однако имеется ряд задач, в которых самое серьезное внимание приходится уделять вопросам *устойчивости*, под которой понимается способность конструкции и ее элементов сохранять определенную начальную форму равновесия. Расчет на устойчивость должен обеспечить отсутствие качественного изменения характера деформации.

Основной задачей науки о сопротивлении материалов является разработка надежных и наиболее экономичных, в отношении массы и размеров, практических методов расчета различных элементов сооружений и машин. Вместе с тем, необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет (предполагает) прибегать к упрощающим гипотезам – т. е. предположениям, которые

оправдываются в дальнейшем путем сопоставления расчетных данных с экспериментом. Т.е. приступая к расчету конструкции, следует, прежде всего, установить, что в данном случае является существенным и что не существенно. Необходимо, произвести схематизацию объекта конструкции, т. е. отбросить все те факторы, которые не могут сколько-нибудь заметным образом повлиять на работу системы в целом.

Такого рода упрощения задачи совершенно необходимы, так как решение с полным учетом всех свойств реального объекта является принципиально невозможным в силу их очевидной неисчерпаемости. Реальный объект, освобожденный от несущественных признаков (рис. 2.1), носит название *расчетной схемы*.

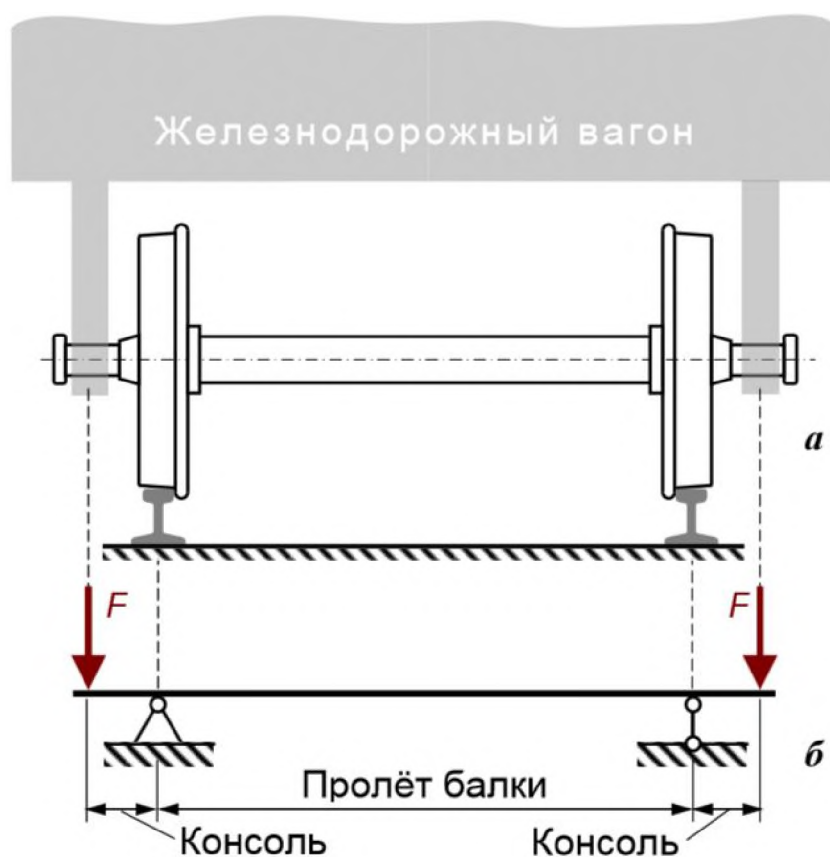


Рисунок 2.1 - Пример реальной конструкции (а) и соответствующей ей расчётной схемы (б).

Процесс превращения реальной конструкции в расчетную схему предполагает выполнение отдельных этапов: (применение) использование

основных принципов и гипотез сопротивления материалов, схематизацию по геометрии отдельных элементов конструкции, схематизацию по опорным устройствам, схематизацию по нагрузке.

Лекция 2. Основные гипотезы и допущения

В сопротивлении материалов принимают следующие основные гипотезы и допущения относительно свойств материала, нагрузок и характера деформаций.

1. **Гипотеза о сплошном строении тела.** Предполагают, что материал полностью заполняет объем тела (пустоты отсутствуют).

2. **Гипотеза об однородности материала.** Предполагают, что все частицы материала обладают одинаковыми свойствами, т. е. свойства материала не зависят от размеров тела. Указанные гипотезы не принимают во внимание атомистическую теорию дискретного строения вещества, и позволяют не учитывать особенности кристаллической структуры металла, разный химический состав, прочностные свойства связующего и наполнителей в пластмассах, бетонах (щебень, песок, цемент), наличие сучков в древесине и т.д.

3. **Гипотеза об идеальной упругости материала.** Под идеальной упругостью понимается способность тела восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших деформацию тела.

4. **Гипотеза об изотропности материала.** Предполагают, что в любом направлении свойства материала одинаковы. В некоторых случаях эта гипотеза неприменима. Например, у древесины в различных направлениях свойства неодинаковы.

5. **Гипотеза плоских сечений.** Поперечные сечения, плоские и нормальные к оси бруса до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси после деформации.

6. Допущение о малости деформаций. Деформации тела настолько малы по сравнению с его размерами, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение нагрузок.

7. Допущение о линейной зависимости между деформациями и нагрузками. Предполагают, что для большинства материалов перемещения, являющиеся результатом деформации тела, прямо пропорциональны вызвавшим их нагрузкам.

8. Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции или наложения). Какая-либо величина, например усилие или перемещение в любом элементе конструкции, вызванные различными факторами (несколькими силами, воздействием температуры), может быть получена как сумма величин, найденных от действия каждого из этих факторов в отдельности, и не зависит от последовательности их приложения.

9. Принцип Сен-Венана. Если тело нагружается статически эквивалентными системами сил и размеры области их приложения невелики (по сравнению с размерами тела), то в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, величина напряжений весьма мало зависит от способа нагружения.

Например, при расчете зубчатого колеса можно фактическую нагрузку от шестерни, распределенную в зоне контакта зубьев по некоторому закону, заменить сосредоточенной силой. Принятые гипотезы и допущения широко используют в расчетах элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными практики.

Схематизация по геометрии отдельных элементов конструкции

Машины и механизмы, с которыми приходится иметь дело на практике, часто представляют собой сложные конструкции, отдельные элементы которых можно свести к следующим простейшим типам (рис. 2.2).

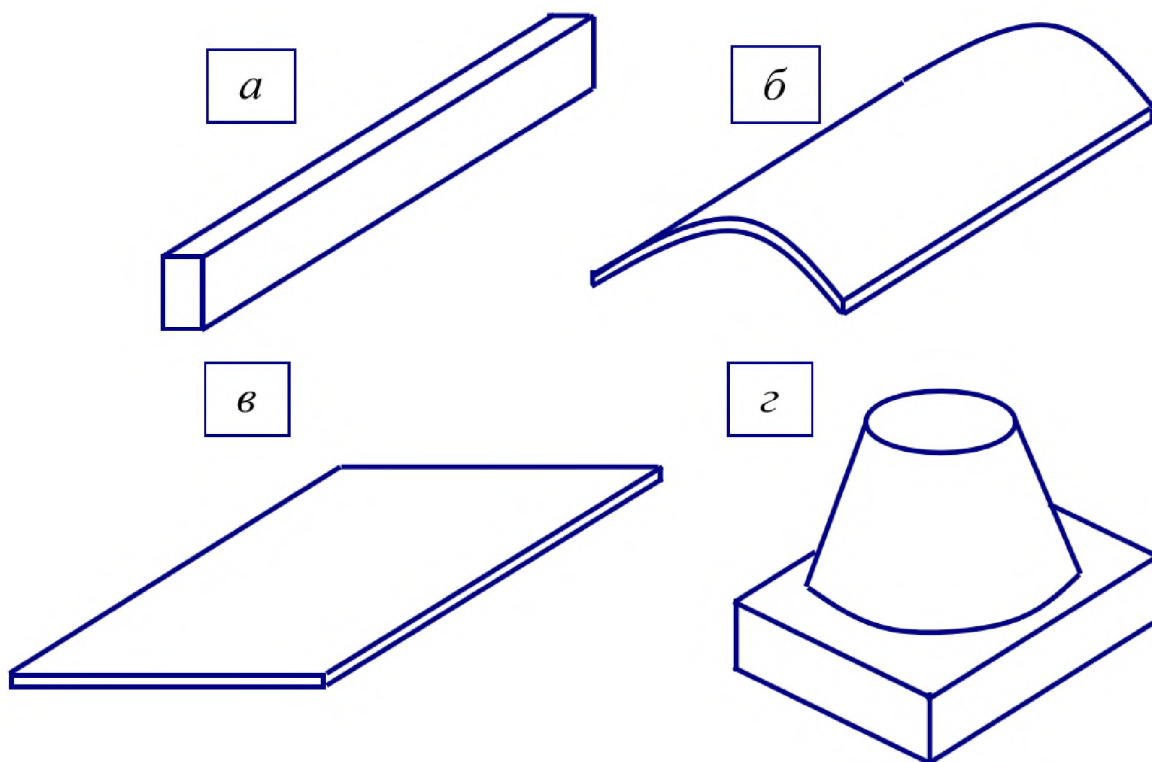


Рисунок 2.2 – Простейшие типы конструктивных элементов

Брус — элемент конструкций, длина которого значительно больше его поперечных размеров (рис. 2.2,а).

Осью бруса называется линия, соединяющая центры тяжести его поперечных сечений. Плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней, называется его поперечным сечением.

Стержень - брус с прямолинейной осью.

Оболочка - элемент конструкции, длина и ширина которого во много раз превышают его толщину(рис. 2.2, б). Геометрическое место точек, равноудаленных от наружной и внутренней поверхностей оболочки, называется срединной поверхностью.

Пластина - оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость (рис. 2.2, в).

Массивное тело -элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях мало отличаются друг от друга (например, сплошная опора моста)(рис. 2.2, г).

В сопротивлении материалов рассматривают преимущественно тела, имеющие форму брусков постоянного сечения, и простейшие системы, состоящие из них. При этом имеются в виду брусья, обладающие достаточной жесткостью, т. е. не претерпевающие значительных деформаций при нагрузке. В расчетных схемах брусья обычно изображают одной осевой линией с идеализированными опорами.

Лекция 3. Схематизация по опорным устройствам

Для прикрепления сооружения к основанию служат опоры, обеспечивающие неподвижность опорных точек конструкции. Обычно в сопротивлении материалов рассматривают три основных типа опор: шарнирно подвижная опора, шарнирно неподвижная опора и жесткое защемление.

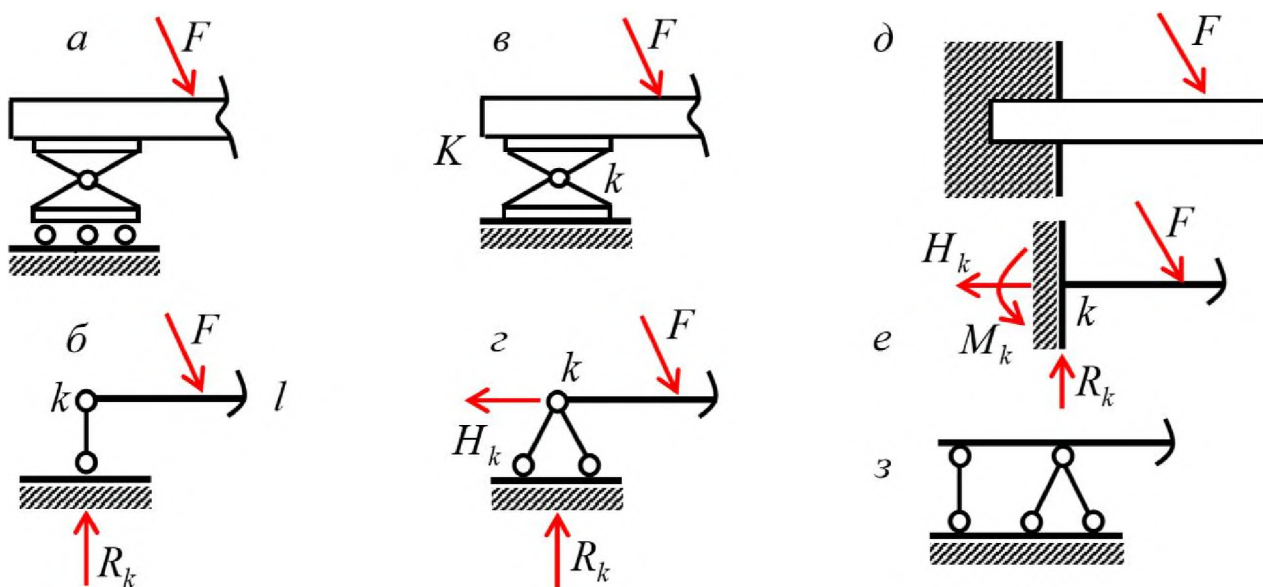


Рисунок 2.3 - Схематизация по опорным устройствам

На рис. 2.3, а изображена простейшая схема устройства шарнирно подвижной опоры, а на рис. 2.3, б – ее условное изображение. Подвижная опора допускает вращение вокруг оси, проходящей через центр шарнира k опоры, и поступательное перемещение по линии kl . В шарнирно подвижной опоре возникает реакция R_k , нормальная к направлению перемещения катков.

Шарнирно неподвижная опора (рис. 2.3, в) обеспечивает вращение верхнего балансира K вокруг оси, проходящей через центр шарнира k , и не

допускает линейных перемещений. В расчетной схеме она представляется двумя опорными стержнями (рис. 2.3, г). В шарнирно неподвижной опоре возникает наклонная реакция, вертикальная и горизонтальная составляющие которой (R_k и H_k) показаны на рис. 2.3, г.

Жесткое защемление (рис. 2.3, д,е,з) не допускает каких либо линейных перемещений и поворота. В защемлении возникают две составляющие R_k , H_k и реактивный момент M_k (рис. 2.3, е). Жесткое защемление эквивалентно трем опорным стержням (рис. 2.3, з).

Схематизация по нагрузке

Внешние и внутренние силы. В сопротивлении материалов активные внешние силы, действующие на рассматриваемое тело (элемент конструкции), часто называют *нагрузками*.

По способу приложения нагрузки подразделяют на *сосредоточенные и распределенные*.

Распределенные нагрузки могут быть поверхностными (давление ветра, воды на стенку) или объемными (сила тяжести, силы инерции).

Если давление q_1 (H/m^2) (рис. 2.4) передается на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента ($l \ll a$), то его можно привести к сосредоточенной силе F . При расчетах сосредоточенную силу считают приложенной в точке. Сосредоточенная сила F измеряется в ньютонах (H), килоньютонах (κH).

Если давление q_2 (H/m^2) (рис. 2.4) передается на элемент конструкции через площадку, размеры которой сравнимы с размерами всего элемента ($l < c$), то его представляют в виде распределенной или погонной нагрузки q с размерностью H/m . На схемах такие нагрузки изображают в виде графиков, показывающих изменение нагрузки по длине или поверхности тела.

По характеру воздействия на элементы конструкции нагрузки подразделяют на *статические и динамические*.

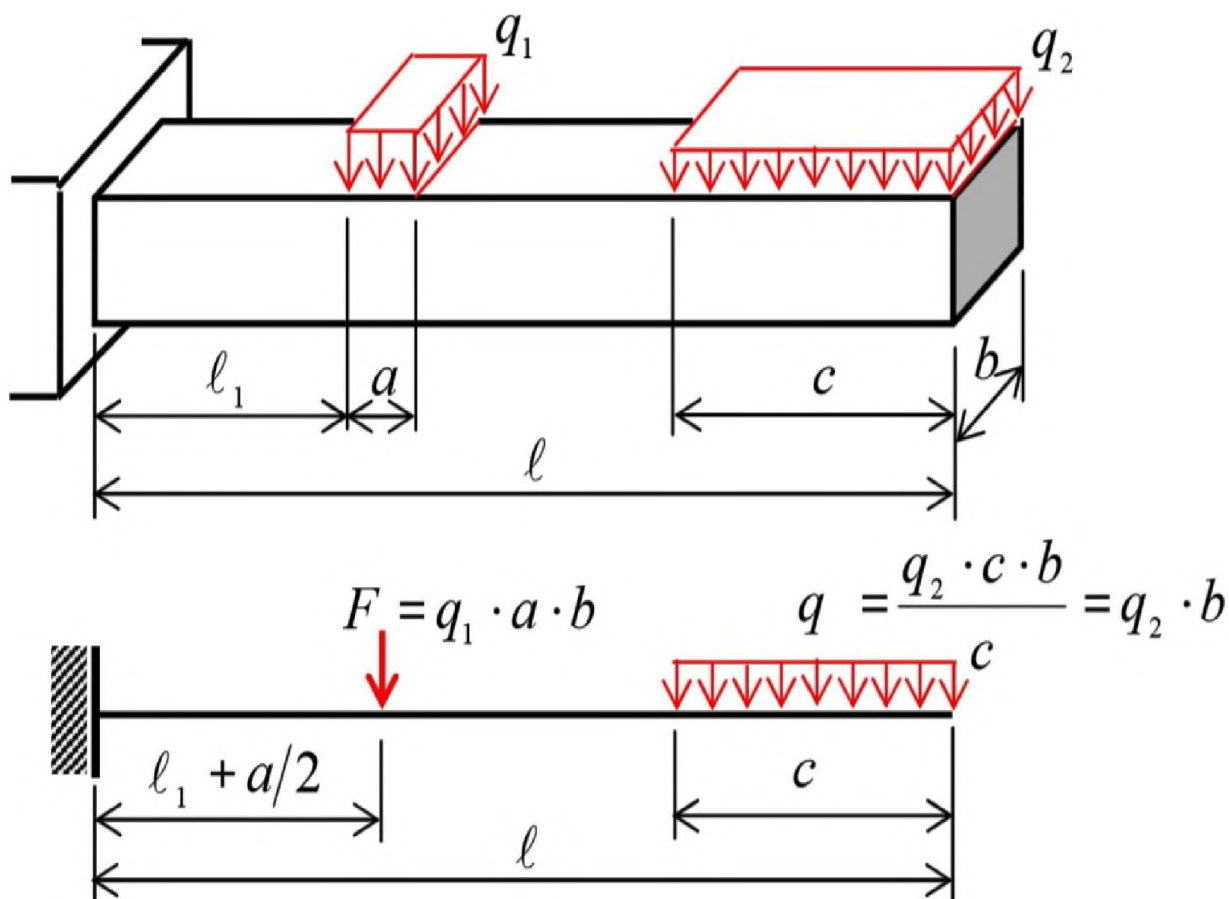


Рисунок 2.4 – Способы приложения нагрузки

Статическими называют нагрузки, которые прикладываются к телу, постепенно возрастаая от нуля до своей конечной величины и оставаясь в дальнейшем практически постоянными. При действии таких нагрузок колебания конструкции, и ее частей, незначительны.

Динамическими называют нагрузки, которые сопровождаются значительными ускорениями как деформированного тела (или его частей), так и взаимодействующих с ним тел. Возникающими при этом силами инерции пренебречь нельзя. Динамические нагрузки делятся на мгновенно приложенные, ударные и повторно-переменные.

Сопротивление тел, оказываемое действующим на них нагрузкам, обуславливается наличием в этих телах особых **внутренних** сил, природа которых объясняется теорией молекулярного строения материи. Указанные внутренние силы существуют всегда, они собственно являются причиной существования тела как такового. При действии на тело **внешних**

сменяются *внутренние силы*, появляются *дополнительные внутренние силы*, которые в дальнейшем будем называть *усилиями*. Эти усилия и являются предметом нашего изучения, так как именно их величина характеризует способность тел сопротивляться внешним воздействиям.

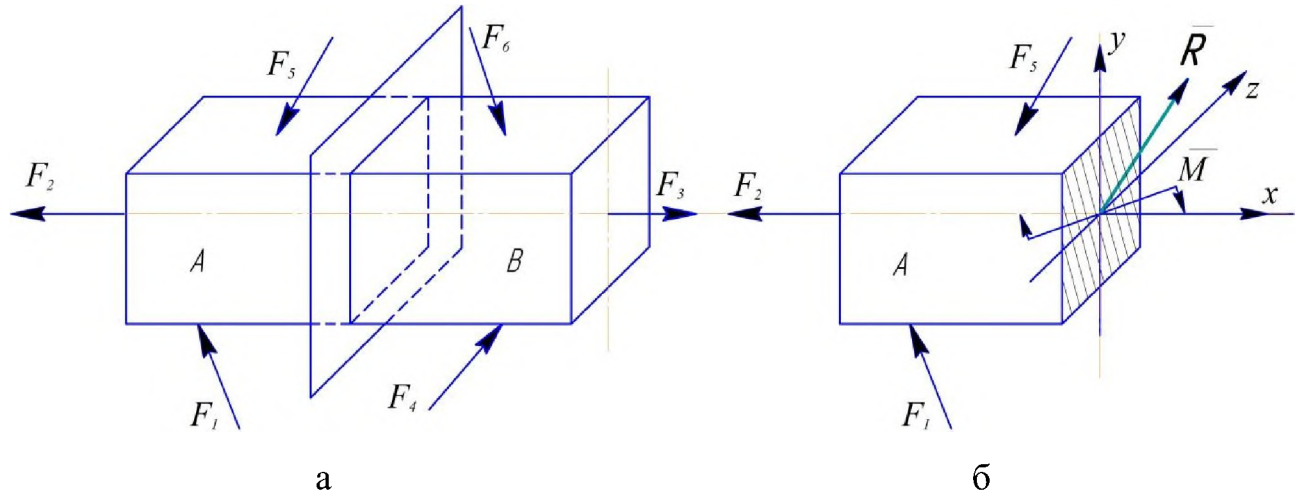


Рисунок 2.5 – Схемы к определению внутренних усилий

Для определения величины внутренних усилий пользуются методом сечений, суть которого заключается в следующем.

1. Тело, на которое действует какая-либо внешняя нагрузка, в интересующем нас месте рассекается (мысленно) на две части (рис. 2.5, а).
2. Отбрасывается условно одна из частей (например, часть *B*).
3. Действие отброшенной части *B* на оставшуюся *A* заменяется *внутренними силами*. Внутренние силы по принципу действия и противодействия всегда взаимны. Часть *A* бруса действует на часть *B* точно так же, как и часть *B* на часть *A*, и системы внутренних сил воздействия частей бруса друг на друга равны по величине и противоположны по направлению.

Так как тело под действием внешних сил находилось в состоянии статического равновесия, то эти внутренние силы, являющиеся внешними для оставшейся части, должны уравновесить часть *A* с приложенными к ней внешними силами (рис. 2.5, б). Таким образом, внутренние силы сводятся к категории внешних сил, для определения которых можно использовать уравнения статики твердого тела.

Со стороны отброшенной части на часть A действует система сил, распределенных по всему сечению. Эту систему в общем случае можно привести к одной силе $\bar{R}$ (главному вектору) и к одной паре сил $\bar{M}$ (главному моменту) (рис. 2.5, б). Выбрав систему координатных осей x, y, z с началом в центре тяжести сечения, разложим главный вектор и главный момент на составляющие по указанным осям.

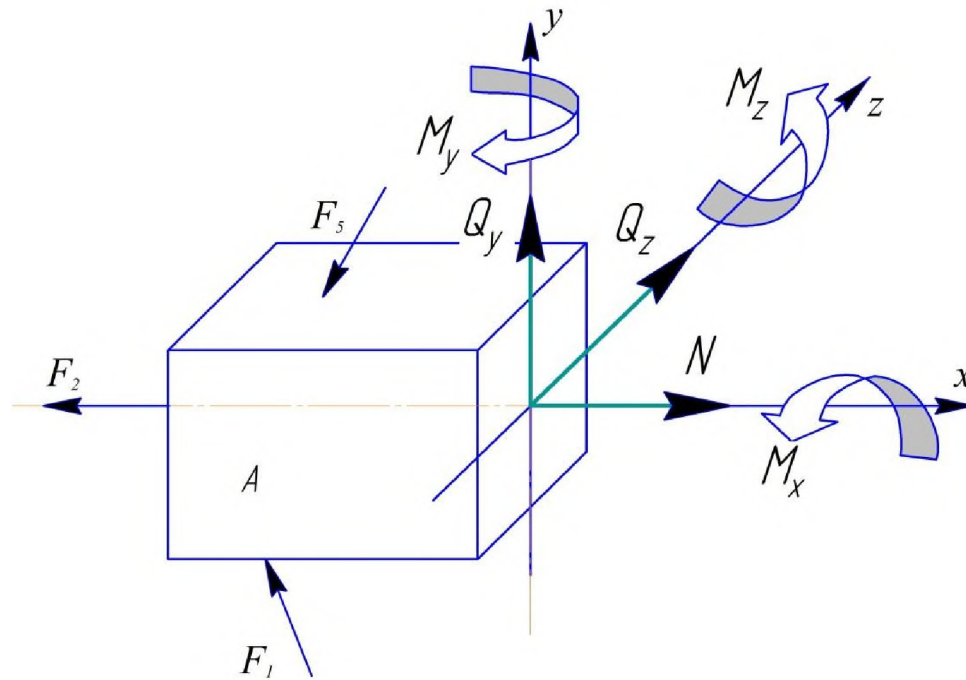


Рисунок 2.6 - Внутренние усилия в поперечном сечении

Эти составляющие имеют следующие обозначения и названия:

N – продольная сила, она действует вдоль оси стержня. При действии только продольной силы имеет место вид деформации – растяжение (сжатие);

Q_y – поперечная сила, действующая вдоль оси y ;

Q_z – поперечная сила, действующая вдоль оси z .

Внутренние усилия Q_y, Q_z названы поперечными силами, потому что они действуют в плоскости поперечного сечения. Действие только поперечной силы Q_y , или Q_z вызывает вид деформации – сдвиг.

Проекции главного вектора-момента названы в соответствии с тем видом деформации, который они вызывают.

M_x – крутящий момент (этот момент закручивает стержень относительно продольной оси x);

M_y – изгибающий момент относительно оси y (этот момент изгибает стержень в плоскости xz);

M_z – изгибающий момент относительно оси z (этот момент изгибает стержень в плоскости xy).

Появление в поперечных сечениях сразу нескольких внутренних усилий приводит к сложным видам деформации (сложному сопротивлению).

Таким образом, можно сформулировать правило определения внутренних силовых факторов: внутренние силы N , Q_y , Q_z численно равны алгебраической сумме проекций всех внешних сил (в том числе и реакций), приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения. Аналогично: внутренние моменты M_x , M_y , M_z численно равны алгебраической сумме моментов от внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения. При известных внешних силах шесть внутренних усилий определяются из шести уравнений статики.

Какую именно сторону, правую или левую, верхнюю или нижнюю следует рассматривать, зависит от схемы нагружения. Предпочтение следует отдавать более простому варианту.

Лекция 4. Понятие о напряжениях. Напряженное состояние в точке

Внутренние усилия, которые были найдены выше из уравнений статики, не являются реальными, а представляют собой лишь статический эквивалент этих усилий, распределенных по всей площади рассматриваемого сечения. Иначе говоря, найденные усилия являются равнодействующими *действительных* внутренних сил, возникающих в каждой точке сечения. В сечении части A (рис. 2.6) выделим элементарную площадку dA (рис. 2.7). В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и направлению. Тогда равнодействующая их $d\vec{R}$ будет проходить через центр тяжести площади элемента dA , координаты которого равны y и z .

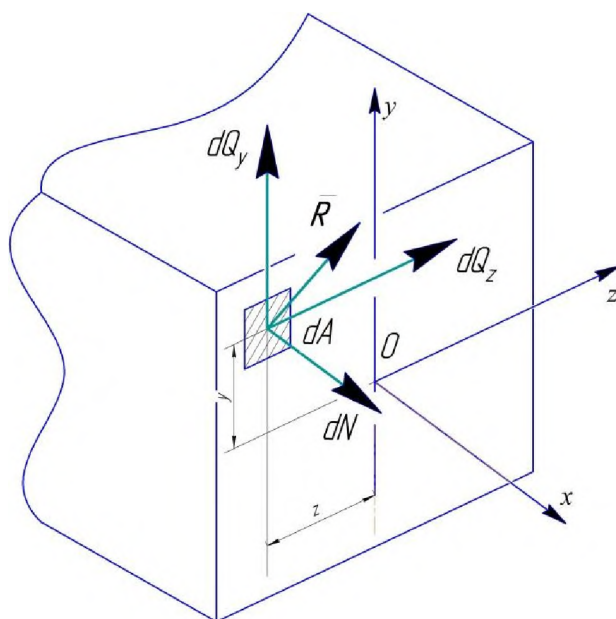


Рисунок 2.7 - Разложение элементарного внутреннего усилия на составляющие

Проектируя вектор $d\bar{R}$ на оси x , y и z , получим элементарную продольную силу dN и элементарные поперечные силы dQ_y и dQ_z . Разделив эти усилия на площадь dA , получим величины внутренних сил, приходящихся на единицу площади:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}; \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}; \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}$$

Эти величины называют напряжениями в точке (с координатами y, z) поперечного сечения тела.

Напряжение нормальное σ – перпендикулярное к сечению, характеризует интенсивность сил растяжения или сжатия частиц элементов конструкции.

Напряжение касательное τ – действующее в плоскости сечения, характеризует интенсивность сил, сдвигающих эти части в плоскости сечения.

Нормальные и касательные напряжения представляют собой интенсивность распределения соответственно нормальных и поперечных сил, действующих по элементарной площадке в рассматриваемой точке.

Через любую точку упругого тела, подверженного действию внешней нагрузки, можно провести бесчисленное множество сечений (площадок), по которым в общем случае будут действовать как нормальные, так и касательные

напряжения. При этом величина и направление указанных напряжений в каждом конкретном случае будут зависеть от ориентации площадки.

Деформация нагруженного тела сопровождается изменением расстояний между его частицами. Внутренние силы, возникающие между частицами, изменяются под действием внешней нагрузки до тех пор, пока не установится равновесие между внешней нагрузкой и внутренними силами сопротивления. Полученное состояние тела называют *напряженным состоянием*. Оно характеризуется совокупностью нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, которые можно провести через рассматриваемую точку. Исследовать напряженное состояние в точке тела — значит получить зависимости, позволяющие определить напряжения по любой площадке, проходящей через указанную точку:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA; \quad M_x = \int_A (\tau_y z - \tau_z y) dA;$$

$$Q_y = \int_A \tau_y \cdot dA; \quad M_y = \int_A (\sigma \cdot z \cdot dA);$$

$$Q_z = \int_A \tau_z \cdot dA; \quad M_z = \int_A (\sigma \cdot y \cdot dA).$$

Единица измерения давления и механического напряжения паскаль (обозначение Па). Паскаль — давление, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 м²: 1 Па = 1 Н/м²; 1 МПа = 1 Н/мм².

Лекция 5. Растяжение сжатие. Напряжения и перемещения. Закон Гука

Стержень (рис. 2.8), под действием двух равных по величине и противоположно направленных по его продольной оси сил F , претерпевает *деформацию растяжения*, которая проявляется в изменении длины и поперечных размеров стержня. Его первоначальная длина увеличивается на величину Δl , именуемую *абсолютным удлинением*, и становится равной l_1 . Таким образом,

$$\Delta l = l_1 - l.$$

Абсолютное удлинение стержня при данном значении деформирующей силы возрастает с увеличением его первоначальной длины.

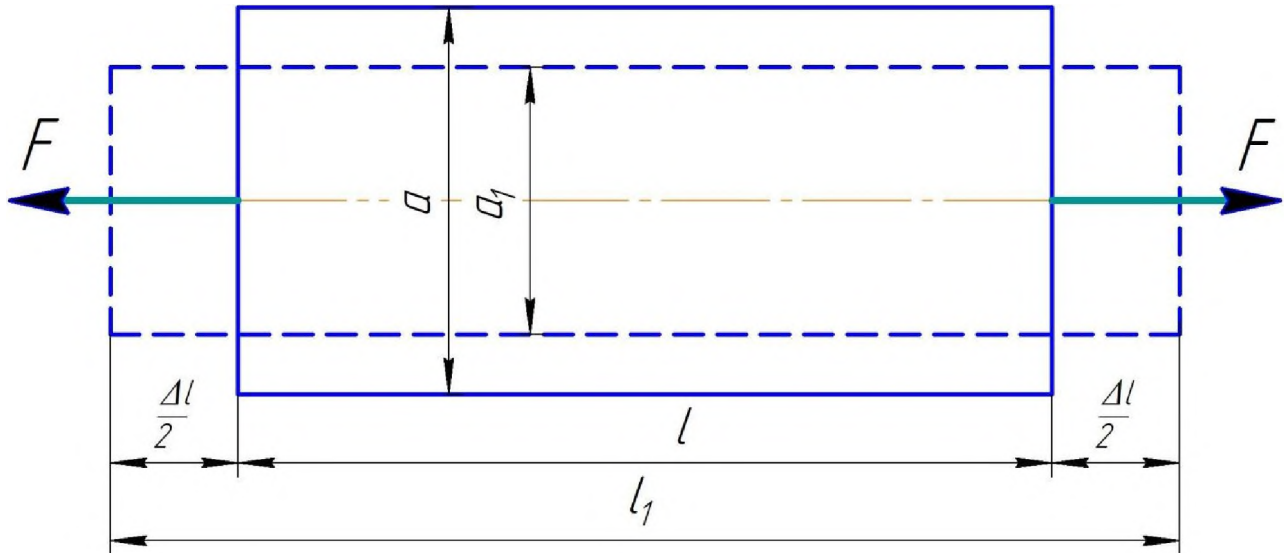


Рисунок 2.8 - Изменение размеров стержня при его растяжении

В связи с этим деформация при растяжении более полно характеризуется относительной величиной $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, которую называют *относительным удлинением*. Очевидно,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l}.$$

При направлении внешних сил, противоположному указанному на рис. 2.8, стержень испытывает *деформацию сжатия*. В этом случае Δl называют абсолютным *укорочением*, так как при сжатии длина стержня уменьшается. Растягивающие продольные силы принято считать *положительными*, а сжимающие – *отрицательными*. Одновременно с продольной деформацией стержень претерпевает поперечную деформацию. При растяжении поперечные размеры уменьшаются, при сжатии увеличиваются. Относительная *поперечная* деформация

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1 - a}{a}.$$

Отношение

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right|$$

называют *коэффициентом Пуассона*. Этот коэффициент определяют опытным путем.

Для стали $\mu = 0,25-0,33$; для меди $\mu = 0,31-0,34$; для бронзы $\mu = 0,32-0,35$; для чугуна $\mu = 0,23-0,27$; для алюминия $\mu = 0,32-0,36$.

В соответствии с гипотезой плоских сечений полагаем, что для однородного стержня все поперечные сечения при деформации перемещаются параллельно и, следовательно, в них действуют только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению. Напряжения, возникающие в сечениях стержня, перпендикулярных его оси при растяжении или сжатии:

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

Экспериментальными исследованиями установлено, что в пределах малых удлинений для *пластичных* материалов имеет место прямая пропорциональная зависимость между напряжениями и деформациями. Эта зависимость носит название *закона Гука*:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности E называется *модулем продольной упругости* (Н/м^2 ; Н/мм^2) и характеризует способность материала сопротивляться упругой деформации при растяжении и сжатии. Величину модуля продольной упругости для различных материалов определяют экспериментально. Подставив в последнее выражение значение величин σ и ε , получим

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA},$$

т. е. абсолютное удлинение (укорочение) стержня при растяжении (сжатии) прямо пропорционально растягивающей (сжимающей) силе, длине стержня и обратно пропорционально модулю упругости E и площади поперечного сечения F . Произведение EA называют жесткостью поперечного сечения при растяжении (сжатии).

Лекция 6. Механические характеристики и свойства материалов

Работоспособность конструкционных материалов при различных видах нагружения определяется величинами, которые называют механическими характеристиками. Механические характеристики устанавливают границу безопасной эксплуатации элементов конструкций при статическом и динамическом (циклическом и ударном) нагружениях. К числу основных механических характеристик относятся *предельные напряжения, твердость, ударная вязкость*.

Величины механических характеристик могут быть получены в лабораторных условиях доведением образцов до разрушения или чрезмерной деформации. Наиболее распространены испытания на растяжение и сжатие, так как они относительно просты, дают результаты, позволяющие с достаточной достоверностью судить о поведении материалов и при других видах деформации. Часто целью испытаний является определение твердости и ударной вязкости.

Все конструкционные материалы можно условно разделить на *хрупкие* и *пластичные*. К весьма пластичным материалам относят малоуглеродистые стали, алюминий, медь и некоторые другие. Эти материалы обладают способностью деформироваться в широких пределах без разрушения. Примерами хрупких материалов могут служить чугун, высокоуглеродистые сорта стали, металлокерамические материалы, стекло. Хрупкие материалы разрушаются без заметной предварительной деформации.

Промежуточное положение занимают малопластичные материалы, к которым могут быть отнесены многие легированные стали, дюралюминий, бронза.

Испытания на растяжение. Диаграмма растяжений

Испытание различных материалов на растяжение осуществляют статическим нагружением на специальных машинах. Для этого применяют стандартный цилиндрический образец (рис. 2.9, а). Длина центрального цилиндра превышает его диаметр приблизительно в 15 раз.

На цилиндре рисками выделяют участок для измерения деформации, длина которого $l_0 = 10d_0$, где d_0 — диаметр стержня до растяжения. Иногда для испытаний применяют плоские или малые цилиндрические образцы, у которых $l_0 = 5d_0$.

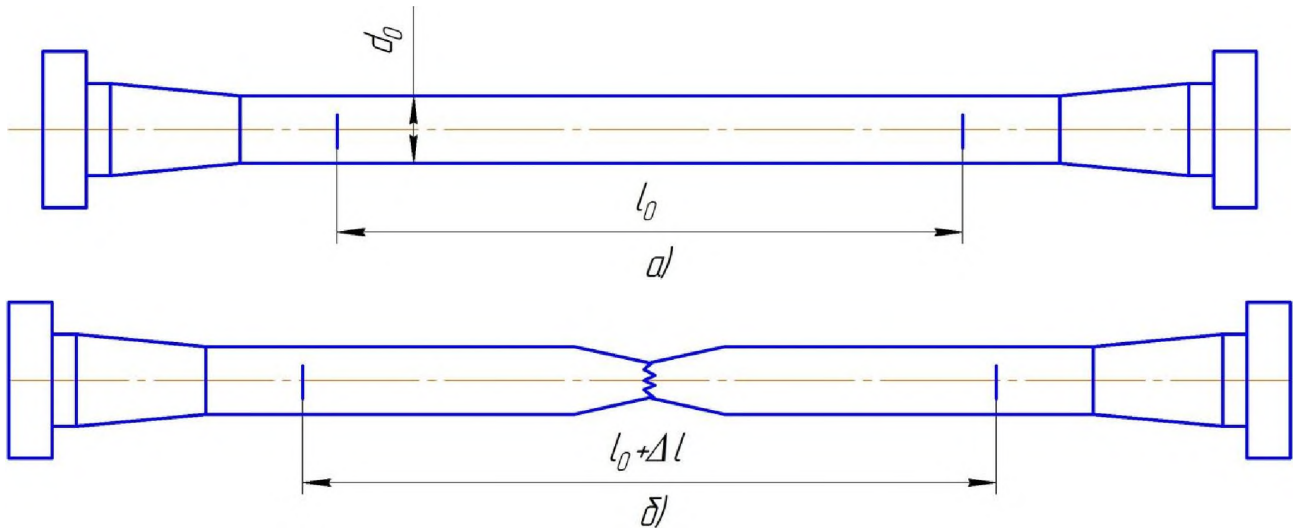


Рисунок 2.9 – Цилиндрический образец: а) – до испытания, б) – после испытания.

При растяжении образца на машинах регистрируют нагрузку на образец и его удлинение Δl . По полученным данным строится диаграмма растяжения образца, представляющая кривую $F = f(\Delta l)$. Такая диаграмма для образца из малоуглеродистой стали показана на рис. 2.10.

Форма диаграммы растяжения в координатах $(F, \Delta l)$ зависит от размеров испытуемого образца, его длины и площади поперечного сечения. Диаграмма растяжения $F = f(\Delta l)$ характеризует свойства конкретного испытуемого образца.

Количественная оценка физических свойств материала может быть сделана при помощи диаграммы растяжения в системе координат $(\sigma; \epsilon)$. Напряжение, откладываемое по вертикальной оси, $\sigma = F/A_0$, где A_0 - площадь поперечного сечения образца до испытания. Относительное удлинение образца,

откладываемое по горизонтальной оси, $\varepsilon = \Delta l / l_0$, где l_0 — длина расчетного участка образца испытания. Так как величины A_0 и l_0 постоянны, диаграмма $\sigma = f(\varepsilon)$ имеет тот же вид, что и $F = f(\Delta l)$ и отличается от нее только масштабами.

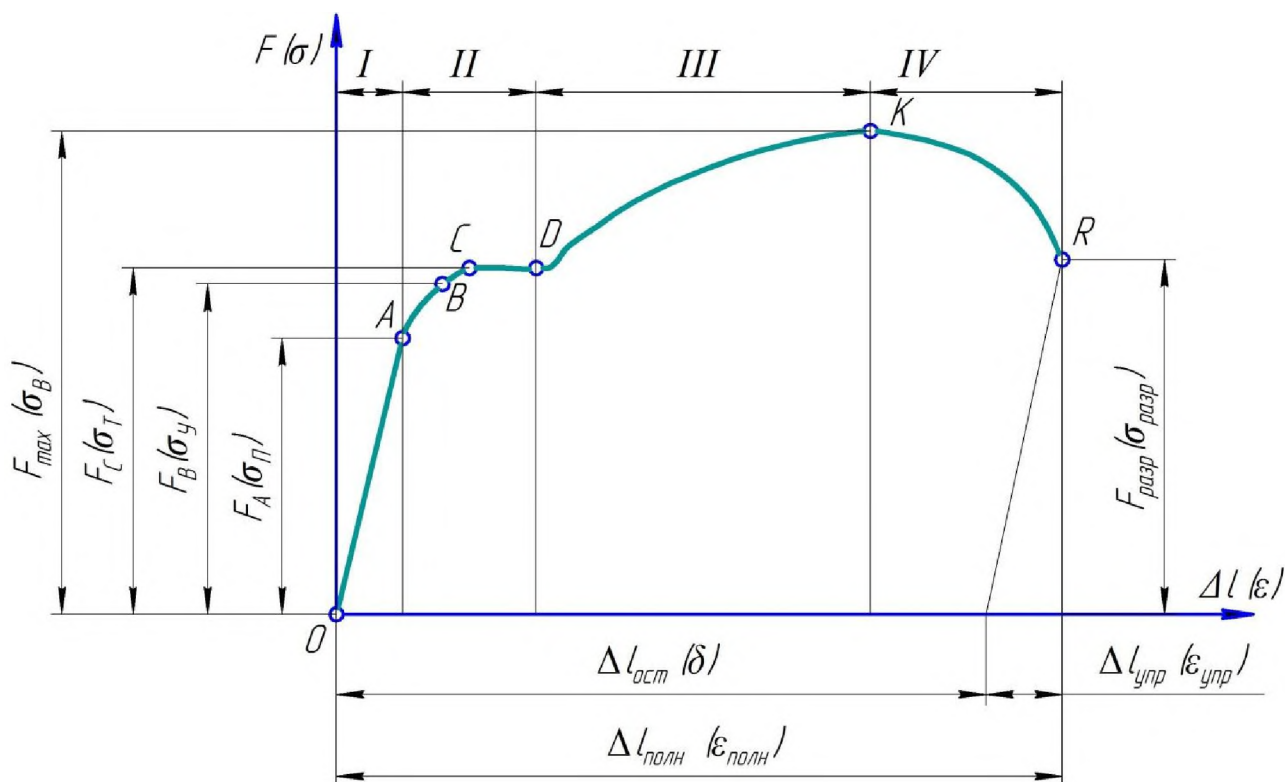


Рисунок 2.10 - Диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали

Диаграмма $\sigma = f(\varepsilon)$ характеризует свойства испытуемого материала и носит название *условной диаграммы растяжения*, так как напряжения и относительные удлинения вычисляют соответственно по отношению к первоначальной площади сечения и первоначальной длине.

Диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали характеризуется следующими четырьмя отличительными участками.

Участок I соответствует упругим деформациям материала образца. На этом участке справедлив закон Гука и величина деформации прямо пропорциональна растягивающему усилию (прямая OA).

Участок II начинается после точки A, когда диаграмма становится криволинейной. Однако до точки B деформации остаются упругими, т. е. при разгрузке образец восстанавливает свою первоначальную форму и размеры.

При дальнейшем увеличении нагрузки за точкой B появляются неупругие деформации. В точке C начинается процесс деформации детали без увеличения внешней нагрузки. Этот процесс называется процессом текучести материала. В зоне текучести у стальных образцов существенно меняются электропроводность и магнитные свойства.

Участок $III(DK)$ характерен увеличением нагрузки, при которой происходит дальнейшая деформация образца. Этот участок называется зоной упрочнения. Заканчивается участок при достижении максимальной нагрузки, воспринимаемой образцом.

Участок IV начинается в точке K и заканчивается разрушением образца в точке R . Этот участок носит название зоны разрушения образца. Деформация образца на этом участке характерна образованием шейки и удлинением образца за счет ее утончения (рис. 2.9, б).

Если образец нагрузить силой, меньшей F_A , и затем нагрузку снять, то имеет место только упругая деформация, остаточная (пластическая) деформация отсутствует.

В соответствии с диаграммой растяжения вводят следующие основные характеристики материала.

1. **Предел пропорциональности** - отношение растягивающего усилия в точке A к первоначальной площади поперечного сечения стержня

$$\sigma_{\Pi} = \frac{F_A}{A_0}.$$

До предела пропорциональности сохраняет силу закон Гука.

2. **Предел упругости** - отношение растягивающего усилия в точке B к первоначальной площади поперечного сечения стержня

$$\sigma_y = \frac{F_B}{A_0}.$$

Предел упругости — такое напряжение, при котором величина относительной остаточной деформации не превышает 0,005%, т. е. предел упругости соответствует такому наибольшему напряжению, до которого

материал сохраняет свои упругие свойства. Для многих материалов разница между пределом пропорциональности и пределом упругости невелика, и на практике между ними обычно различия не делают.

3. **Предел текучести** - отношение растягивающего усилия в точке S_k первоначальной площади поперечного сечения стержня

$$\sigma_T = \frac{F_C}{A_0}.$$

Предел текучести — такое напряжение, при котором происходит рост деформации без увеличения нагрузки. Для ряда материалов, не имеющих на диаграмме выраженной площадки текучести, вводят понятие *условного предела текучести*, под которым подразумевают напряжение, вызывающее остаточную деформацию, равную 0,2%,

4. **Предел прочности (временное сопротивление)** - отношение наибольшей нагрузки к первоначальной площади поперечного сечения стержня

$$\sigma_{B(ПЧ)} = \frac{F_{max}}{A_0}.$$

Предел прочности при растяжении обозначают $\sigma_{B.P.}$, при сжатии $\sigma_{B.C.}$. Предел прочности соответствует максимальному напряжению, возникающему в образце до его разрушения.

При испытании образца на разрыв определяют также относительное остаточное удлинение материала образца при разрыве:

$$\delta = \frac{\Delta l_{ост}}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\%,$$

где l_0 - первоначальная расчетная длина испытуемого образца; l_1 - расчетная длина образца после разрыва; ее измеряют после стыковки двух частей разорванного образца.

Величину остаточного удлинения образца $\Delta l_{ост}$ можно определить при помощи диаграммы растяжения (рис. 2.10). Для этого из полного удлинения образца $\Delta l_{полн}$ при его разрушении в точке R вычитают величину упругого удлинения образца $\Delta l_{упр}$. Задача решается графически с помощью прямой,

проведенной через точку R параллельно участку OA упругого растяжения материала.

Относительное удлинение образца при разрыве, как уже было сказано, служит показателем пластических свойств материала.

Второй характеристикой пластичности материала является относительное остаточное сужение при разрыве

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\%,$$

где A_0 — первоначальная площадь поперечного сечения; A_1 — площадь поперечного сечения в наиболее тонком месте шейки после разрыва.

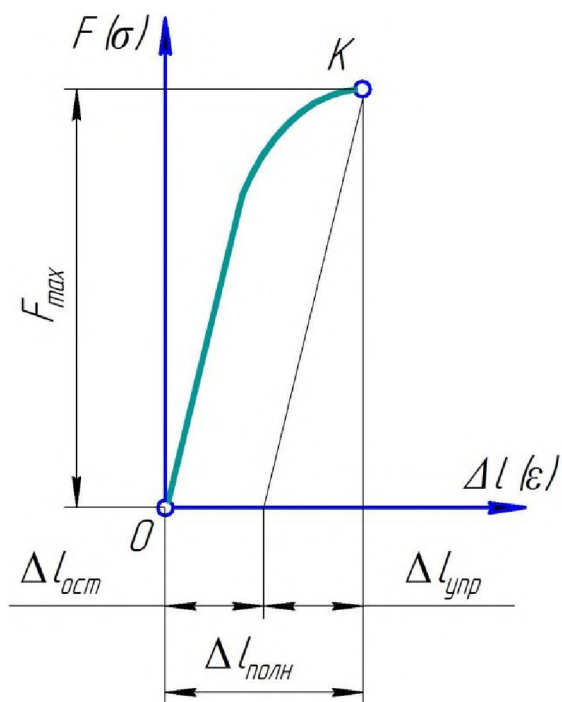
5. Диаграмма растяжения хрупких материалов показана на рис. 2.11, где отклонение от закона Гука начинается при малых значениях деформирующей силы. Эта диаграмма не имеет площадки текучести. Образцы разрушаются при очень малой остаточной деформации без образования шейки. За характеристику прочности хрупких материалов, как и в случае растяжения, принимается временное сопротивление.

Явление наклепа. Если при испытании создать в образце напряжение, превышающее предел текучести, затем разгрузить, дать «отдохнуть» и подвергнуть повторному нагружению, можно заметить, что предел пропорциональности значительно увеличивается, но при этом уменьшается пластичность.

Повышение предела пропорциональности и уменьшение пластичности материала образца при вытяжке его за предел текучести называют наклепом.

Упрочнение стали при помощи наклепа используют при изготовлении проволочных канатов, грузовых цепей и т. д.

Испытание на сжатие. Во избежание искривления металлические образцы, подлежащие испытанию на сжатие, выполняют в виде коротких цилиндров высотой $h \leq 3d$ или кубиков. Образцы на сжатие испытывают на специальных прессах или универсальных разрывных машинах. Диаграмма сжатия образца из пластического материала показана на рис. 2.12, а.



В начальной части диаграмма сжатия совпадает с диаграммой растяжения (линия $OABCD$). После точки D материал образца расплющивается, и сжимающая сила быстро возрастает.

Модуль упругости первого рода, а также пределы пропорциональности, упругости и текучести у малоуглеродистой стали при растяжении и сжатии можно считать совпадающими.

Диаграмма сжатия образца из

Рисунок 2.11 - Диаграмма растяжения хрупких материалов 2.12,б. Основными характеристиками хрупкого материала при сжатии является предел прочности, обозначаемый $\sigma_{в.с.}$, и относительная остаточная деформация при разрушении $\varepsilon_{ост}$. Предел прочности при сжатии хрупких материалов оказывается значительно выше, чем при растяжении, т. е. хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению.

На рис. (2.13, а) представлен вид малоуглеродистого стального образца до сжатия и после сжатия на специальном испытательном станке, а на рис. (2.13, б) изображен образец из хрупкого материала, разрушенный при сжатии.

Определение твердости. Твердостью называют способность материала сопротивляться механическому проникновению в него другого тела. Твердость определяют различными способами, и соответственно существуют различные величины, характеризующие твердость. Наиболее широкое распространение получили испытания твердости по Бринелю и по Роквеллу. Твердость по Бринелю определяют вдавливанием закаленного шарика в испытуемый материал.

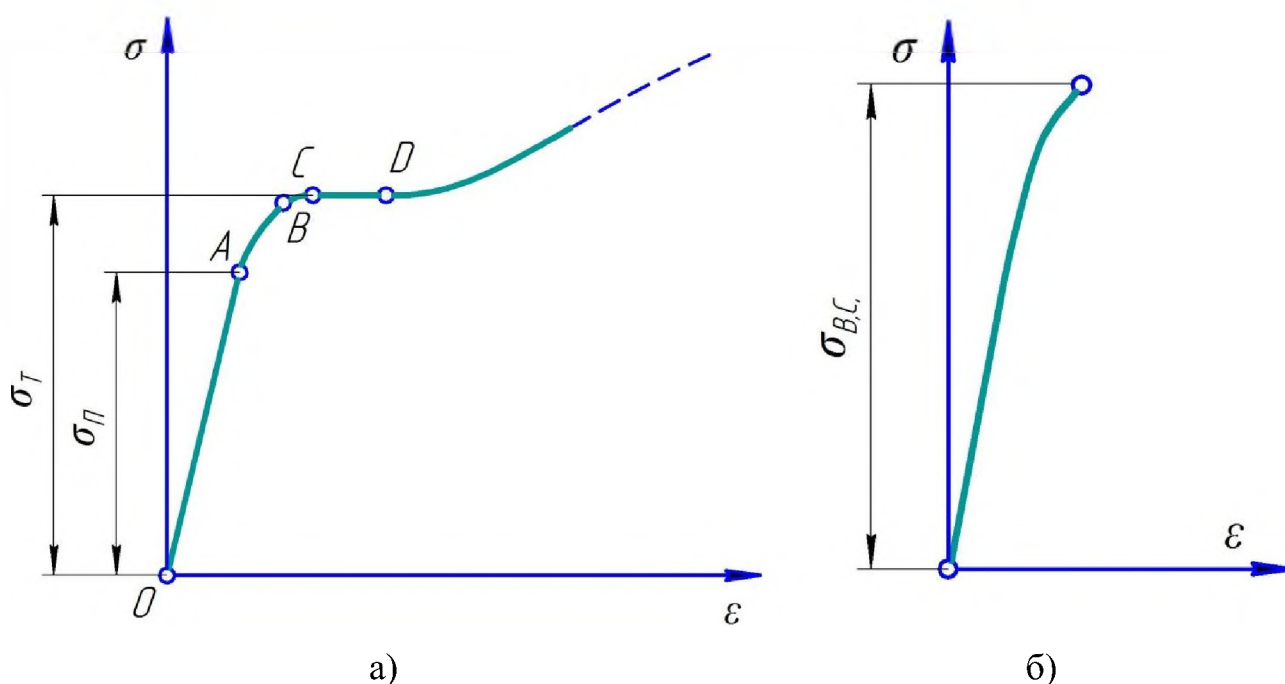


Рисунок 2.12 – Диаграмма сжатия образца из: а) малоуглеродистой стали; б) хрупкого материала

При испытании по Роквеллу в материал вдавливают острый алмазный наконечник. Величина, характеризующая твердость или число твердости по Бринелю (НВ), представляет отношение силы F , с которой вдавливается шарик, к поверхности A лунки, оставшейся после вдавливания на испытуемом материале:

$$HB = \frac{F}{A}.$$

Числом твердости можно пользоваться в производственных условиях для определения механических характеристик материала. Так, по числу твердости можно с достаточной степенью точности определить предел текучести, временное сопротивление и предел упругости. Для углеродистой термически не обработанной стали связь между числом твердости и временным сопротивлением может быть выражена следующей зависимостью:

$$\sigma_B = (0,35 \div 0,40)HB.$$

Для легированной термически обработанной стали

$$\sigma_B = (0,35 \div 0,45)HB.$$

В справочной литературе приведены таблицы, устанавливающие зависимость между числами твердости по Бринелю и Роквеллу.



Рисунок 2.13 - Вид образцов после сжатия: а) из малоуглеродистой стали;
б) из хрупкого материала (разрушение)

Определение ударной вязкости. Ударной вязкостью называют величину, характеризующую способность материала сопротивляться действию ударных нагрузок. Меру сопротивления удару определяют на специальных испытательных копрах, на которых при помощи маятника разрушаются образцы.

Ударную вязкость определяют как отношение работы, затраченной на разрушение образца, к площади его поперечного сечения

Величины механических характеристик основных конструкционных материалов приведены в соответствующих справочниках.

Описанные выше испытания материалов с целью получения их механических характеристик проведены по методикам, строго регламентированным ГОСТами и ведомственными нормативами.

Механические характеристики материалов зависят от многих факторов, в числе которых можно назвать, например, химический состав и технологию получения материалов, виды термической обработки и обработки резанием, условия эксплуатации и др.

Лекция 7. Допускаемые напряжения и запасы прочности

Для обеспечения работоспособности детали необходимо, чтобы фактически возникающие напряжения растяжения и сжатия не превышали некоторого *безопасного, или допускаемого напряжения*, обозначаемого $[\sigma]$.

Условие прочности:

$$\sigma_p \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c \leq [\sigma_c]; \quad \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]$$

где σ_p и σ_c – наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения, МПа;

$[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии, МПа.

Допускаемое напряжение – это такое напряжение, при котором обеспечивается достаточная прочность и долговечность детали.

Для того чтобы деталь обладала надежностью и работала безотказно, необходимо создать требуемый запас прочности по отношению к экспериментально определенным величинам предельных напряжений $\sigma_{пр}$, при которых может разрушиться деталь или возникнуть пластическая деформация.

Следовательно, безопасное (или допускаемое) напряжение должно являться для данного материала и вида нагружения частью экспериментально определенного предельного напряжения.

Таким образом,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пр}}{[n]},$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение, МПа; $[n]$ — регламентированный нормами проектирования *коэффициент запаса прочности* или *коэффициент безопасности*; $\sigma_{пр}$ — предельное напряжение материала, МПа.

В качестве исходной величины для определения предельных напряжений выбирают одну из нормативных механических характеристик материала:

- для пластичных материалов при статическом нагружении — предел текучести σ_T ;

- для хрупких материалов при статическом нагружении — временное сопротивление σ_B ;

- для любых материалов при циклическом изменении нагрузки — предел выносливости (усталости) σ_r .

Величина регламентированного коэффициента запаса прочности $[n]$ определяется по выражению

$$[n] = [n_1][n_2] \dots [n_n],$$

и зависит от степени надежности материала, точности расчетной схемы, степени динамичности нагрузки и величины возможной перегрузки, степени ответственности детали, условий работы детали, наличия концентраторов напряжения и т. д.

Типы задач. При расчете конструкций на прочность встречаются три вида задач, которые вытекают из условия прочности

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

а) поверочный расчет (проверка прочности). Известны усилие N и площадь A . Вычисляют $\sigma = N/A$ и, сравнивая его с предельным σ_T или σ_B (для пластичного и хрупкого материалов соответственно), находят фактический коэффициент запаса прочности

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma}, \quad n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma},$$

который затем сопоставляют с нормативным $[n]$;

б) проектный расчет (подбор сечения). Известны внутреннее усилие N и допускаемое напряжение $[\sigma]$. Определяют требуемую площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq [A] = \frac{N}{[\sigma]};$$

в) определение грузоподъемности (несущей способности). Известны площадь A и допускаемое напряжение $[\sigma]$. Вычисляют внутреннее усилие

$$N \leq [N] = A \cdot [\sigma],$$

а затем в соответствие со схемой нагружения – величину внешней нагрузки $F \leq [F]$.

Расчеты на жесткость при растяжении. Иногда наряду с условиями прочности добавляют ограничения на перемещение некоторых элементов конструкции, то есть вводят условие жесткости $\delta_{max} \leq [\delta]$, где $[\delta]$ – величина допускаемого перемещения (изменение положения в пространстве) некоторого контролируемого сечения. Деформацию растягиваемого или сжимаемого элемента вычисляют с использованием закона Гука.

Пример. К жестко защемленному брусу постоянного поперечного сечения приложены внешние сосредоточенные силы F (рис. 2.14).

Требуется:

1. Построить эпюры внутренних усилий и нормальных напряжений;
2. Произвести проверку бруса по условию прочности, на различных его участках;
3. Определить перемещения сечений на участках и построить эпюру перемещений.

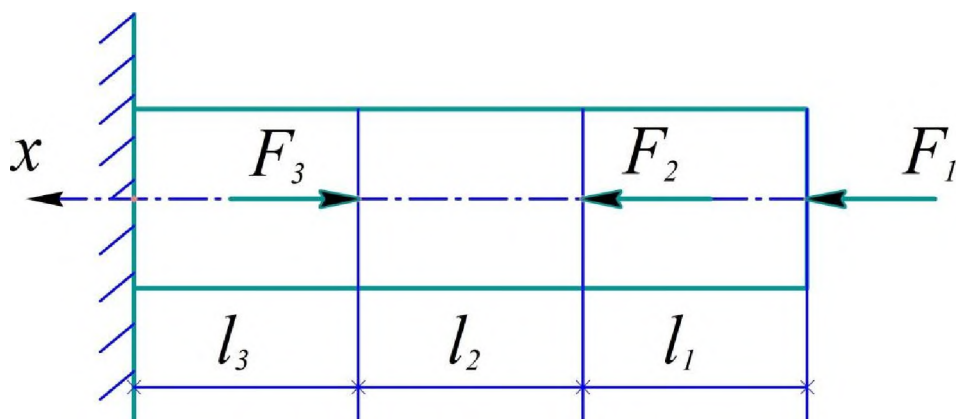


Рисунок 2.14 – Схема нагружения бруса

Исходные данные:

$$F_1 = 10 \text{ кН}; F_2 = 20 \text{ кН}; F_3 = 50 \text{ кН};$$

$l_1 = 0,1 \text{ м}; l_2 = 0,2 \text{ м}; l_3 = 0,2 \text{ м};$ площадь поперечного сечения $A = 110 \text{ мм}^2$; материал бруса: сталь $[\sigma_p] = 250 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$

Решение:

1. Разбиваем брус на участки. Границей участка считают:

- а) точку приложения силового фактора;
- б) изменение размеров или формы поперечного сечения;
- в) изменение материала бруса.

В данном случае размер, форма и материал бруса по условию задачи не изменяются, следовательно, брус имеет три расчетных участка, границами которых служат точки приложения внешних сосредоточенных сил F (рис. 2.15, а):

- I участок – от точки С до точки D;
- II участок – от точки В до точки С;
- III участок – от точки А до точки В.

2. Брус одним концом зашечлен, и в опоре (точка А) возникает реакция. Обозначим ее R_A и направим в произвольную сторону вдоль оси x . Составим уравнение равновесия. Запишем сумму проекций внутренних и внешних усилий действующих вдоль оси x .

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0, & -R_A + F_1 + F_2 - F_3 &= 0, \\ R_A &= F_1 + F_2 - F_3 = 10 + 20 - 50 = -20 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Знак минус говорит о том, что действительное направление опорной реакции R_A выбрано не верно. На схеме (рис. 2.15, а) исправляем его на противоположное и в дальнейших расчетах значение опорной реакции R_A *принимает со знаком плюс (новое направление R_A показано пунктирной линией).*

3. Определим внутренние продольные усилия.

Продольные усилия N_x , возникающие в поперечных сечениях бруса на каждом участке, определяются по внешней нагрузке с помощью метода сечений. Сечения по участкам показаны (рис. 2.15, а) волнистыми линиями. При рассмотрении участков будем двигаться справа налево, поочередно отсекая левую часть и рассматривая правую.

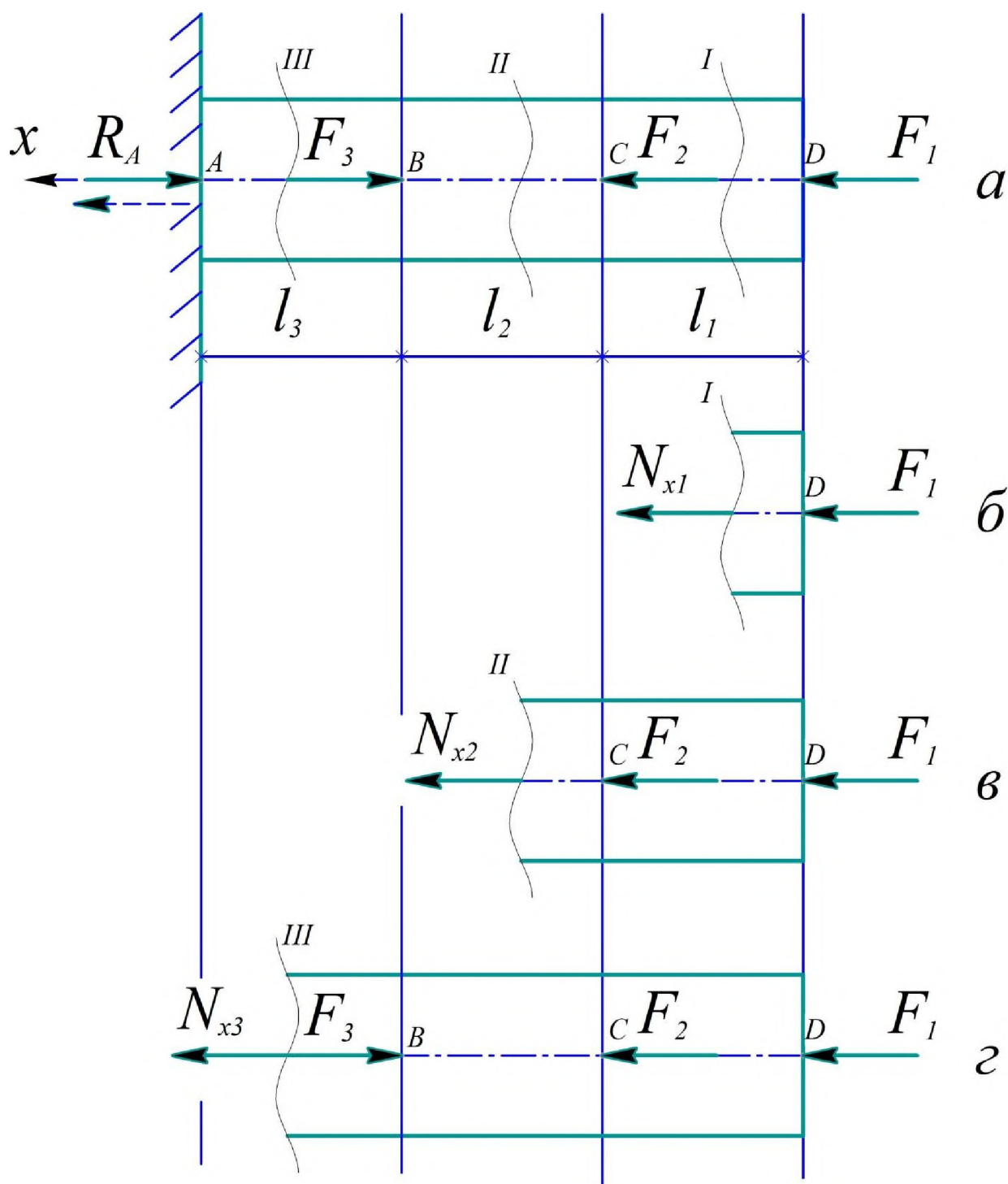


Рисунок 2.15 - Схемы к определению внутренних усилий, напряжений и перемещений сечений

Действие отброшенной левой части заменяем внутренним усилием N_x . Внутреннее усилие всегда принимаем положительным (растягивающим), вектор которого направлен от сечения. Уравнение равновесия составляем проецируя все силы на продольную ось x бруса.

Участок I (рис.2.15, б)

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0, & N_{xI} + F_I &= 0, \\ N_{xI} &= -F_I = -10 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Знак минус указывает на то, что усилие является сжимающим.

Участок II (рис.2.15, в)

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0, & N_{x2} + F_I + F_2 &= 0, \\ N_{x2} &= -F_I - F_2 = -10 - 20 = -30 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Участок III (рис.2.15, г)

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0, & N_{x3} + F_I + F_2 - F_3 &= 0, \\ N_{x3} &= -F_I - F_2 + F_3 = -10 - 20 + 50 = 20 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Строим эпюру внутренних усилий – график, изображающий закон изменения внутренних усилий по длине бруса.

- Для построения эпюры N_x (рис.2.16, а) проводим ось абсцисс графика (ось или базу эпюры) параллельно оси бруса. В пределах каждого из участков продольная сила постоянна, т.е. эпюра параллельна оси абсцисс.

- По найденным значениям строим эпюру N_x . Положительные значения (растяжение) откладываются (в выбранном масштабе) над осью эпюры, отрицательные (сжатие) – под осью. (При вертикальном расположении продольной оси положительные значения эпюр откладываются вправо.)

- В местах приложения сосредоточенных сил на эпюре получаются скачкообразные изменения ординат – «скачки». Размер «скачка» равен приложенной в соответствующем месте бруса внешней сосредоточенной силе.

- Эпюру принято штриховать, при этом штриховка перпендикулярна оси эпюры – каждая линия штриховки (ордината графика) дает в принятом масштабе значение продольной силы

4. Для обеспечения требуемой прочности конструкции должно выполняться условие:

$$\sigma = \frac{N_x}{A} \leq [\sigma_p]$$

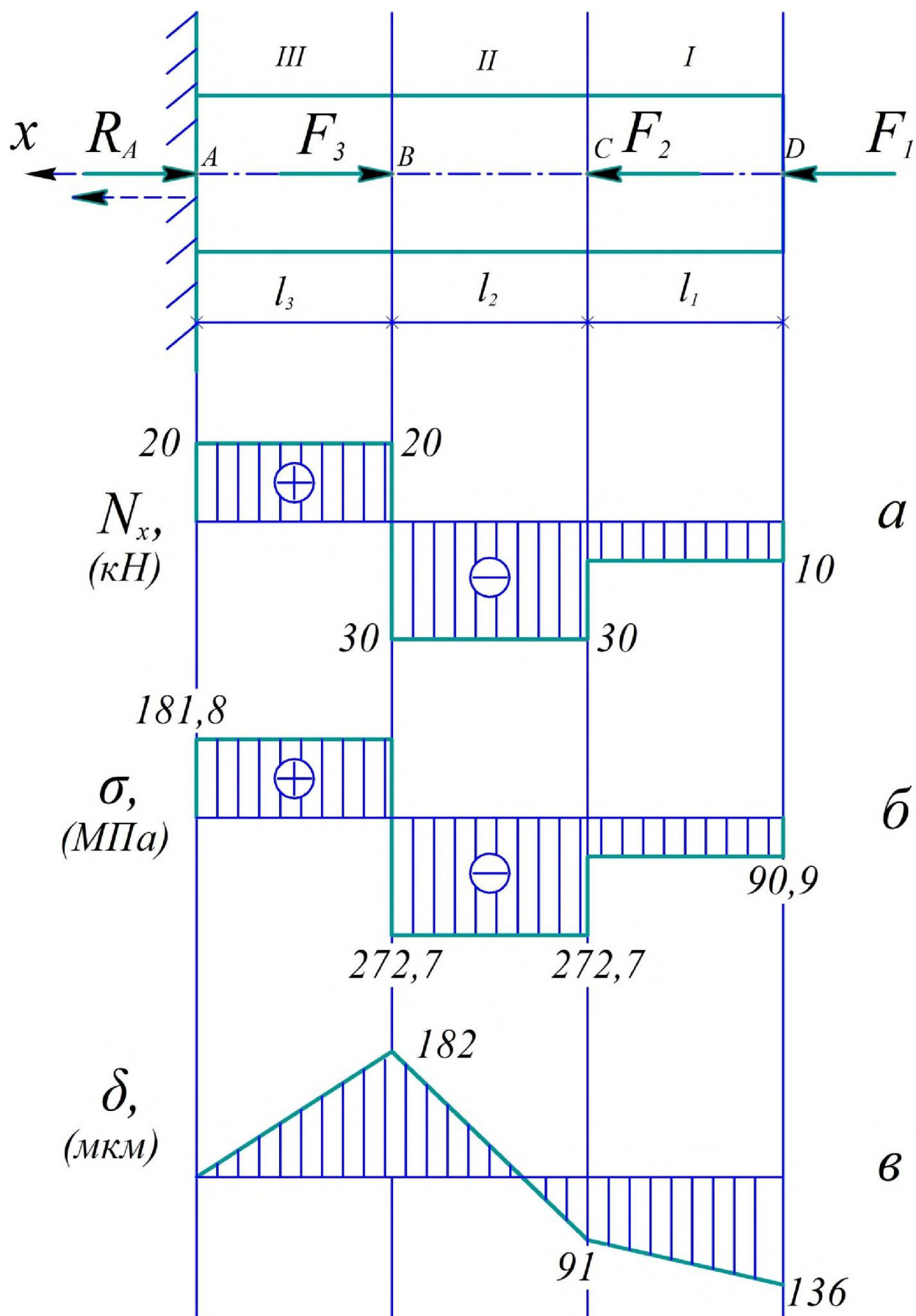


Рисунок 2.16 – Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений

Определим напряжения на каждом участке:

$$\sigma_I = \frac{N_{x1}}{A} = \frac{-10 \cdot 10^3 \text{ (Н)}}{110 \text{ (мм}^2\text{)}} = -90,9 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{x2}}{A} = \frac{-30 \cdot 10^3 \text{ (Н)}}{110 \text{ (мм}^2\text{)}} = -272,7 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{x3}}{A} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ (Н)}}{110 \text{ (мм}^2\text{)}} = 181,8 \text{ МПа}$$

Строим эпюру напряжений (рис. 2.16, б). Сравним расчетные напряжения $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ с допускаемым $[\sigma_p]$ ($[\sigma_p] = 250 \text{ МПа}$ по условию задачи). Значения напряжений принимаются по модулю.

$$\sigma_I \leq [\sigma_p] \Rightarrow 90,9 \text{ МПа} \leq 250 \text{ МПа} - \text{условие выполняется;}$$

$$\sigma_{II} \leq [\sigma_p] \Rightarrow 272,7 \text{ МПа} \geq 250 \text{ МПа} - \text{условие не выполняется;}$$

$$\sigma_{III} \leq [\sigma_p] \Rightarrow 181,8 \text{ МПа} \leq 250 \text{ МПа} - \text{условие выполняется;}$$

Таким образом, прочность второго участка не обеспечена.

5. Определим перемещения сечений бруса. Удлинения каждого из участков:

$$\Delta l_1 = \frac{N_{x1} \cdot l_1}{E \cdot A} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 110} = -0,0455 \text{ мм} = -45,5 \text{ мкм;}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{x2} \cdot l_2}{E \cdot A} = \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 110} = -0,273 \text{ мм} = -273 \text{ мкм;}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_{x3} \cdot l_3}{E \cdot A} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 110} = 0,182 \text{ мм} = 182 \text{ мкм.}$$

Перемещения сечений. За начало отсчета принимаем точку А (рис.2.16).

В этом месте брус защемлен, его перемещение равно нулю $\delta_A = 0$.

$$\delta_B = l_3 = 182 \text{ мкм;}$$

$$\delta_C = l_3 + l_2 = 182 - 273 = -91 \text{ мкм;}$$

$$\delta_D = l_3 + l_2 + l_1 = 182 - 273 - 45 = -136 \text{ мкм.}$$

Строим эпюру перемещений (рис.2.16, в). Таким образом, крайнее сечение переместится относительно защемления на 136 мкм в сторону защемления.

Лекция 8. Сдвиг

Сдвиг – простой вид деформации, характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями.

Деформация сдвига может быть получена, когда на брус с противоположных сторон на весьма близком расстоянии друг от друга действуют две равные силы, перпендикулярные оси бруса и направленные в противоположные стороны (рис. 2.17, а), или когда к брусу бесконечно малой высоты приложена сила, перпендикулярная его оси (рис. 2.17, б).

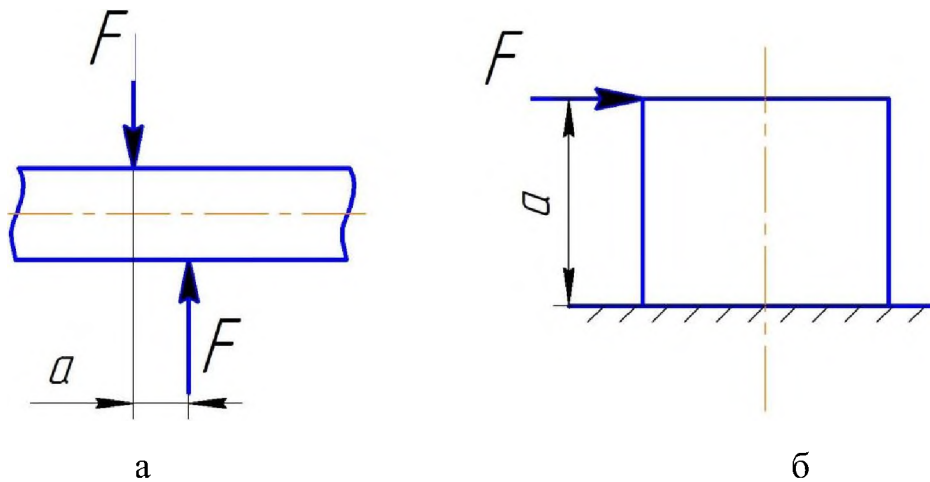


Рисунок 2.17– Условия возникновения деформации сдвига

При сдвиге размера a настолько мал, что изгибающим моментом можно пренебречь. При сдвиге в поперечном сечении из шести внутренних усилий действует только одно – поперечная сила Q , которая определяется методом сечений и равна: $Q = \Sigma F$. От поперечной силы возникают касательные напряжения τ . Предполагая их равномерное распределение по плоскости поперечного сечения бруса получим:

$$\tau = \frac{Q}{A}.$$

Деформация при чистом сдвиге. Закон Гука при сдвиге. Рассмотрим деформацию элемента $ABCD$ (рис. 2.18) при чистом сдвиге.

Под действием касательных напряжений грань BC сдвинется параллельно грани AD на некоторую величину $BB' = CC' = \Delta s$ – абсолютный сдвиг.

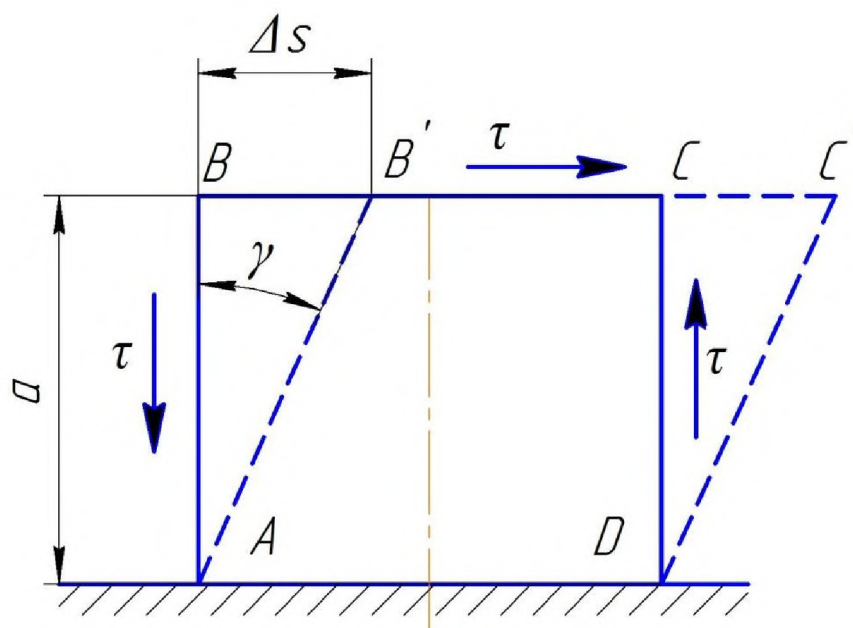


Рисунок 2.18 - Деформации при чистом сдвиге

Элемент $ABCD$ деформируется, прямые углы станут острыми или тупыми, изменяясь на величину γ . Угол γ – *относительный сдвиг* (угол сдвига).

$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta s}{a}$$

В пределах упругих деформаций между углом сдвига и соответствующими касательными напряжениями существует прямая пропорциональная зависимость (закон Гука)

$$\tau = G\gamma,$$

где G – коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости при сдвиге, $Па$.

Модуль сдвига характеризует способность материала сопротивляться упругим деформациям при сдвиге.

Закон Гука при чистом сдвиге:

$$\Delta s = \frac{Qa}{GA},$$

где GA – жесткость сечения при сдвиге.

Условие прочности при сдвиге (срезе) записывается в виде:

$$\tau_{max} = \frac{Q}{A} \leq [\tau]$$

Задача. Подобрать диаметр заклепок, соединяющих накладки с листом; проверить прочность заклепок на смятие (рис.2.19). Материал листов и заклепок – сталь Ст3.

Дано: $F = 20$ кН; $t = 9$ мм; $t_l = 5$ мм; $b = 50$ мм; $[\tau_{cp}] = 80$ МПа; $[\tau_{см}] = 200$ МПа.

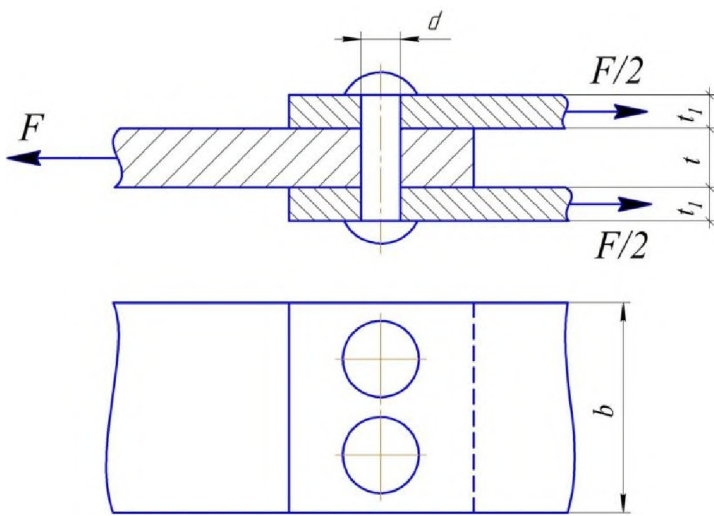


Рисунок 2.19 – Схема к определению диаметра заклепок

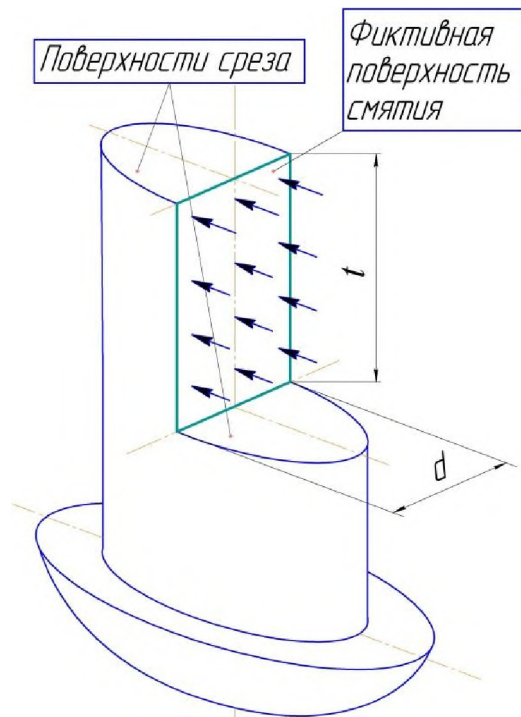


Рисунок 2.20 – Фиктивная площадь смятия и поверхности среза заклепки

Решение. Определение диаметра заклепок. Из условия прочности при срезе $\tau_{max} = \frac{Q}{A_{cp}} \leq [\tau]$ определяем требуемую площадь поперечного сечения заклепок ($Q = F$). Стержень заклепки подвергается срезу в двух плоскостях; средняя часть заклепки сдвигается влево. Суммарная площадь среза

$$A_{cp} \geq \frac{F}{[\tau]} = \frac{\pi d^2}{4} m \cdot n \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot m \cdot n \cdot [\tau]}}$$

где $m = 2$ – количество плоскостей среза заклепки;

$n = 2$ – количество заклепок.

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 20000}{3,14 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 80}} = 8,9 \text{ мм.}$$

Принимаем $d = 9,0$ мм.

Проверка заклепок на смятие. Заклёпка работает не только на сдвиг (рис. 2.19). Боковая поверхность заклёпки испытывает сжимающее давление листов, эта деформация заклёпки по боковой поверхности называется смятием.

Смятие – вид местной пластической деформации, возникающей при сжатии твердых тел, в местах их контакта. Смятие материала начинается в случае, когда интенсивность напряжений достигает величины предела текучести материала.

Действительное распределение нормальных напряжений по цилиндрической поверхности заклёпки имеет сложный характер. Для упрощения расчёта принимается фиктивная площадь смятия с равномерным распределением нормальных напряжений. Эта площадь представляет собой прямоугольник, одной стороной которой служит диаметр заклепки d , другая сторона равна толщине листа, передающего давление на стержень заклепки (рис.2.20). Так как толщина среднего листа меньше суммы толщин обеих накладок, то в худших (наиболее опасных) условиях по смятию будет работать именно средняя часть заклепки. Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$
$$A_{\text{см}} = d \cdot t \cdot n = 9 \cdot 9 \cdot 2 = 162 \text{ мм}^2$$
$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} = \frac{20000}{162} = 123,5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 123,5 \text{ МПа.}$$

$123,5 \text{ МПа} < 200 \text{ МПа}$ – прочность на смятие обеспечена.

Лекция 9. Кручение

Кручение – вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент

M_x . Остальные силовые факторы (N , Q_y , Q_z , M_y , M_z) отсутствуют. Кручение возникает в валах, винтовых пружинах, в элементах пространственных конструкций и т.п.

Вал – брус, работающий на кручение. Внешние крутящие моменты передаются на вал в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес, там, где поперечная нагрузка смещена относительно оси вала (рис. 2.21).

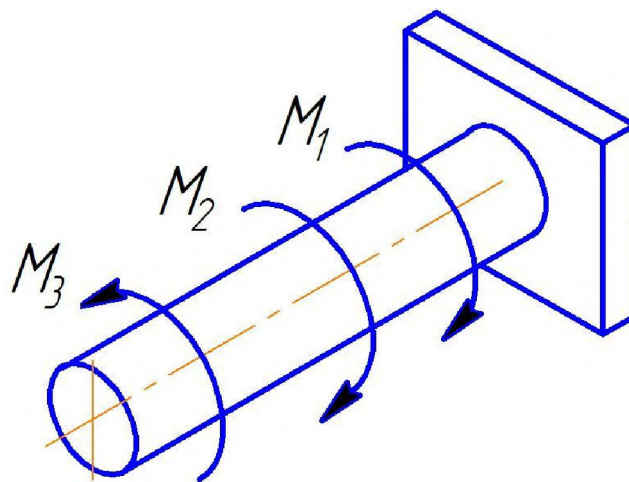


Рисунок 2.21 – Схема к расчету вала, работающего на кручение

Крутящие моменты как внутренние усилия определяются методом сечений. Вал мысленно рассекают плоскостью, перпендикулярной его геометрической оси, затем отбрасывают одну из частей (наиболее нагруженную), а ее действие на оставленную часть заменяют неизвестным моментом $M_{кр}$. Процедура метода сечений сводится к формуле

$$M_{кр} = \sum_i M_k^i$$

Таким образом, крутящий момент в поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Под знак суммы внешние моменты входят по принятому *правилу знаков*: крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части вала, действующий на него внешний момент, направлен по

ходу часовой стрелки. Положительный крутящий момент вызывает положительные касательные напряжения.

Задача. К стальному круглому валу, жестко заделанному одним концом (рис. 2.22), приложены четыре крутящих момента: M_1 , M_2 , M_3 и M_4 .

Требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. Определить допустимый диаметр вала из расчета на прочность.

Исходные данные: $M_1 = 2,5$ кНм, $M_2 = 4,0$ кНм, $M_3 = 4,5$ кНм, $M_4 = 1,0$ кНм. Вид нагрузки – переменная, действующая от нуля до максимума и от максимума до нуля (пульсирующая), материал вала – сталь 40, допускаемое напряжение $[\tau_{кр}] = 100$ МПа.

Вычерчиваем схему вала, отмечая на ней расчетные сечения *I-I*, *II-II*, *III-III* и *IV-IV* (рис. 2.22, а). Определение действующих на стальной круглый вал суммарных крутящих моментов, в нашем случае, проще начать со *свободного конца вала*.

В сечении I-I величина суммарного крутящего момента:

$$\sum M_{кр\ I-I} = -M_1 = -2,5 \text{ кНм}$$

В сечении II-II величина суммарного крутящего момента:

$$\sum M_{кр\ II-II} = -M_1 + M_2 = -2,5 + 4 = 1,5 \text{ кНм}$$

В сечении III-III величина суммарного крутящего момента:

$$\sum M_{кр\ III-III} = -M_1 + M_2 - M_3 = -2,5 + 4 - 4,5 = -3 \text{ кНм}$$

В сечении IV-IV величина суммарного крутящего момента:

$$\sum M_{кр\ IV-IV} = -M_1 + M_2 - M_3 + M_4 = -2,5 + 4 - 4,5 + 1 = -2 \text{ кНм}$$

По расчетным данным строим эпюру крутящих моментов $M_{кр}$ (рис. 2.22, б). Анализ данной эпюры показывает, что наибольший суммарный крутящий момент $M_{max} = 4,5$ кНм возникает в сечении *III-III*, где действует крутящий момент M_3 .

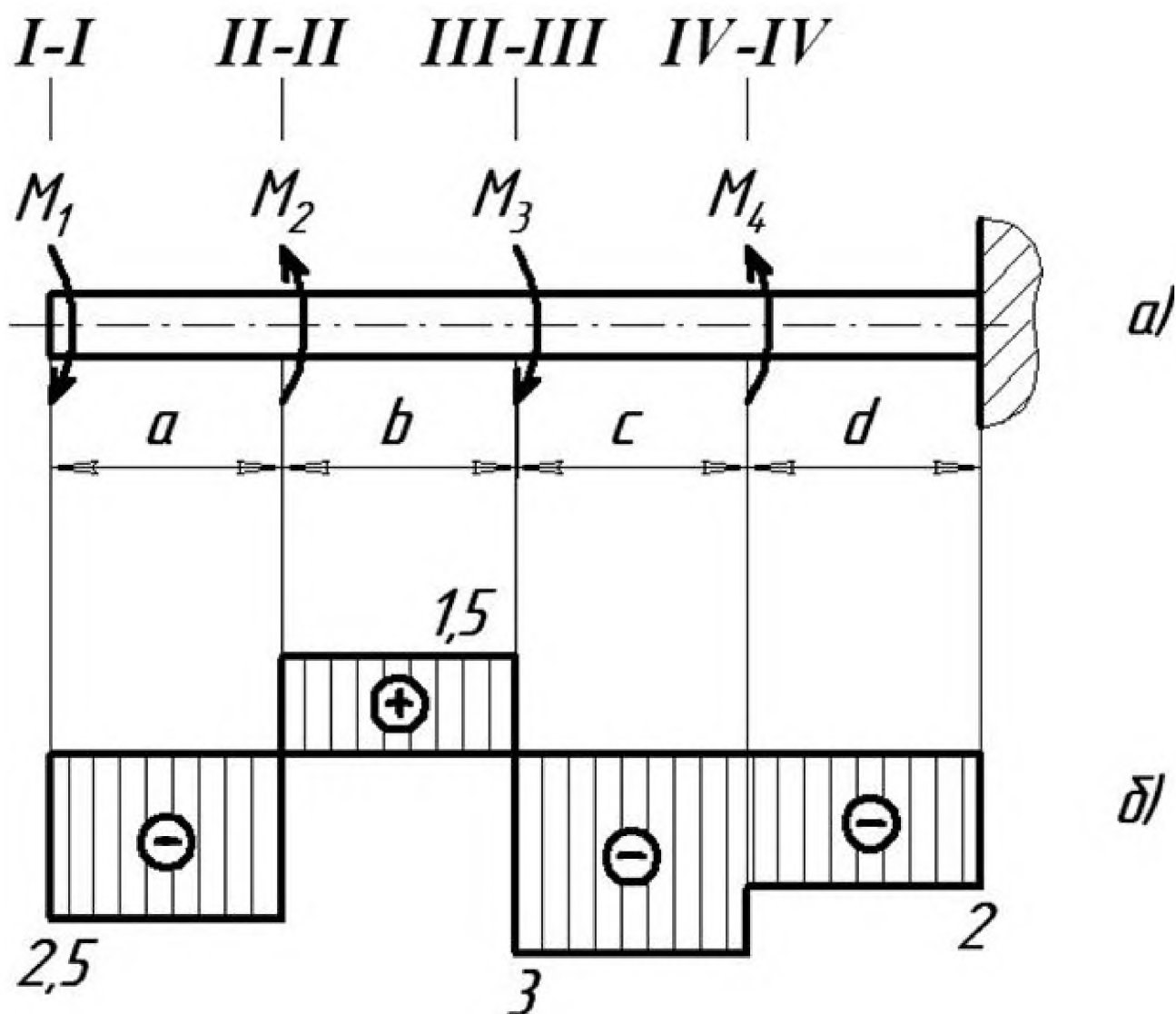


Рисунок 2.22 - Расчетная схема вала, эпюра $M_{кр}$ (кНм)

Используя условие прочности, определяем диаметр вала d_{ϵ} в опасном сечении (где действует наибольший суммарный крутящий момент).

Условие прочности на кручение имеет вид:

$$\tau_{кр} = \frac{M_{max}}{W_p} \leq [\tau_{кр}],$$

где M_{max} – максимальный крутящий момент, Нмм.

Момент сопротивления кручению W_p (для тел с круглым поперечным сечением, например, вал) определяется по формуле:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d_{\epsilon}^3}{16}, \text{ мм}^3,$$

где d_{ϵ} – диаметр вала, мм.

Из условия прочности при изгибе получим d_B .

$$\tau_{кр} = \frac{16 M_{max}}{\pi \cdot d_B^3} \leq [\tau_{кр}],$$

$$d_B = \sqrt[3]{\frac{16 M_{max}}{\pi \cdot [\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4,5 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 100}} = 61,2 \text{ мм.}$$

Расчетное значение диаметра вала округлим до большего целого числа $d_B = 62 \text{ мм.}$

Лекция 10. Прямой изгиб. Внутренние усилия

Изгибом называется такой вид деформации, при котором на брус действуют внешние силы, перпендикулярные его геометрической оси oa , или пары сил (моменты), лежащие в плоскостях, проходящих через эту ось (рис. 2.23, а, б). Сама ось при этом искривляется (o_1a) (рис. 2.23, а).

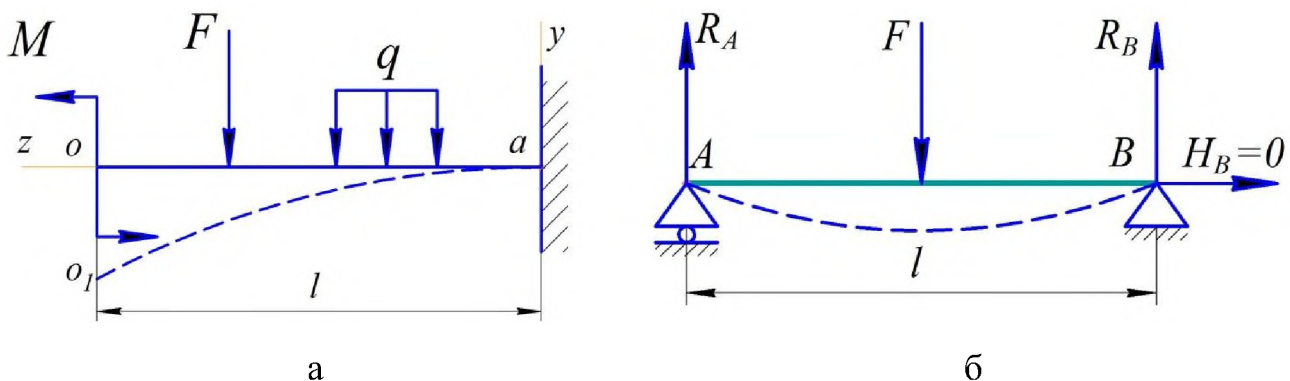


Рисунок 2.23 - Деформация балок при изгибе

Прямой брус, работающий на изгиб, называется *балкой*.

Изгиб называется *плоским*, если все нагрузки, действующие на балку, приложены в одной плоскости, называемой силовой.

Изгиб *прямой* если силовая плоскость совпадает с одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения (рис. 2.24). На расчетной схеме балку принято заменять ее осью (рис. 2.23, а). При этом все нагрузки должны быть приведены к оси балки, т.е. силовая плоскость совпадает с плоскостью чертежа.

Неподвижность балок под действием внешних нагрузок обеспечивается благодаря наличию опорных закреплений (опор) рис. 2.3. В них возникают реакции, которые вместе с нагрузками представляют собой уравновешенную систему внешних сил, действующих на балку.

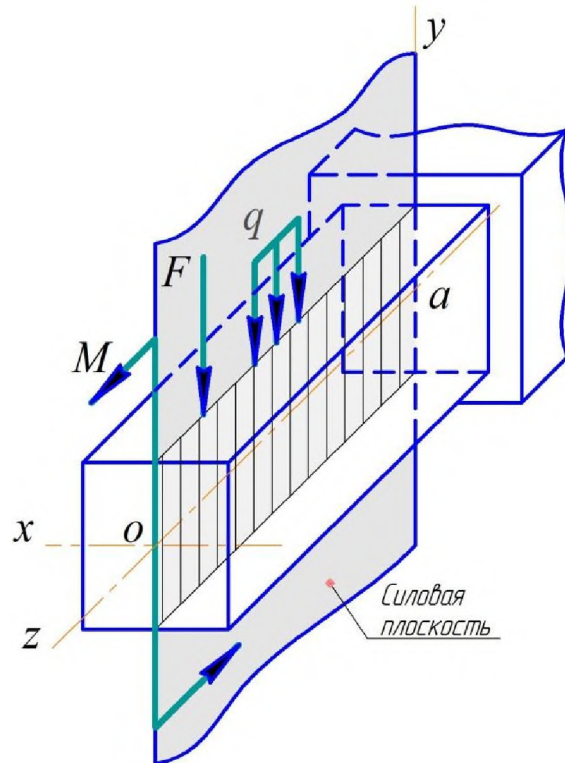


Рисунок 2.24 - Положение силовой плоскости при прямом изгибе

В зависимости от типа опор различают следующие разновидности простейших статически определимых балок:

1. Простая балка – балка, свободно лежащая на двух опорах, имеющая одну неподвижную и одну подвижную шарнирные опоры (рис. 2.23, б). Расстояние между опорами называют пролетом l .

2. Консоль – балка, защемленная одним концом и не имеющая других опор (рис. 2.23, а). Длину такой балки называют вылетом l .

3. Консольная балка – балка, лежащая на двух опорах со свешивающимися концами, которые также называются консолями. В зависимости от их числа балка может быть двухконсольной(рис. 2.25) или одноконсольной.

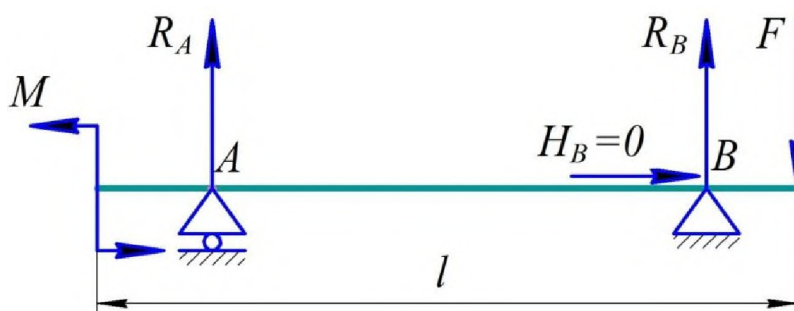


Рисунок 2.25 - Консольная балка

Горизонтальные реакции шарнирно-неподвижных опор, жесткой заделки при изгибе всегда равны нулю, поскольку балка несет только вертикальную и моментную нагрузку (см. рис. 2.25).

Определение опорных реакций. При определении неизвестных реакций для любой плоской системы можно составить три уравнения статики. Рассмотрим однопролетную консольную балку (рис. 2.26) и на ее примере покажем методику определения опорных реакций.

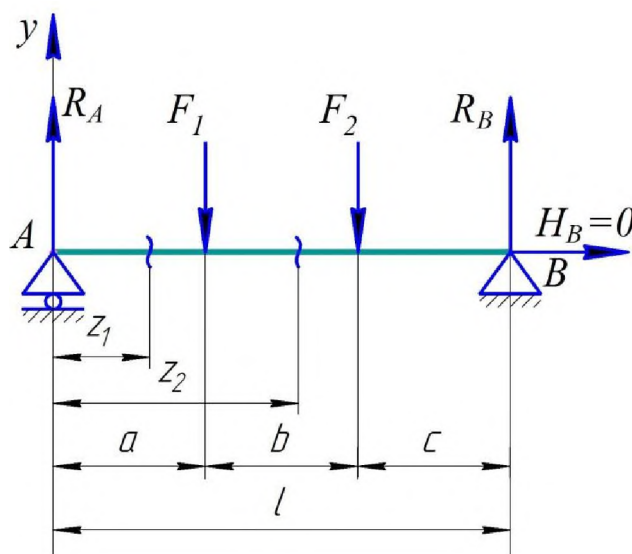


Рисунок 2.26 - Схема к определению опорных реакций

1. Выбираем (произвольно) направления реакций и показываем их на рисунке. Если в результате вычисления реакция получается отрицательной, то меняем на рисунке ее направление и в дальнейшем считаем эту реакцию положительной.

2. Если на балку действует нагрузка интенсивностью q , распределенная по всей или по какой-то части балки длиной l , то при определении опорных реакций ее мысленно приводят к равнодействующей, которая равна площади распределенной нагрузки ($Q = ql$) и приложена в ее центре тяжести.

3. Опоры обычно обозначают буквами (в нашем случае – A и B). Три неизвестные реакции определяют из следующих уравнений равновесия:

а) сумма проекций всех сил на ось балки равна нулю:

$$\sum z = 0.$$

Из данного уравнения находят горизонтальную реакцию H_B , которая (как было отмечено выше) при изгибе балок равна нулю;

б) сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира B равна нулю

$$\sum M_B = 0.$$

Из уравнения определяют вертикальную реакцию R_A ;

в) сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира A равна нулю:

$$\sum M_A = 0.$$

Уравнение позволяет определить вертикальную реакцию R_B .

4. Для контроля правильности определения опорных реакций можно воспользоваться одним из приведенных ниже уравнений статики: сумма проекций всех сил на вертикаль (нормаль к геометрической оси балки) равна нулю:

$$\sum y = 0.$$

Внутренние усилия в сечениях балки при изгибе. Правило знаков внутренних усилий

После того, как найдены и проверены опорные реакции, приступают к определению внутренних усилий в поперечных сечениях балки, используя метод сечений. Рассмотрим балку, нагруженную силами F_1 и F_2 (рис. 2.26), и определим внутренние усилия в ее поперечных сечениях на некоторых силовых участках.

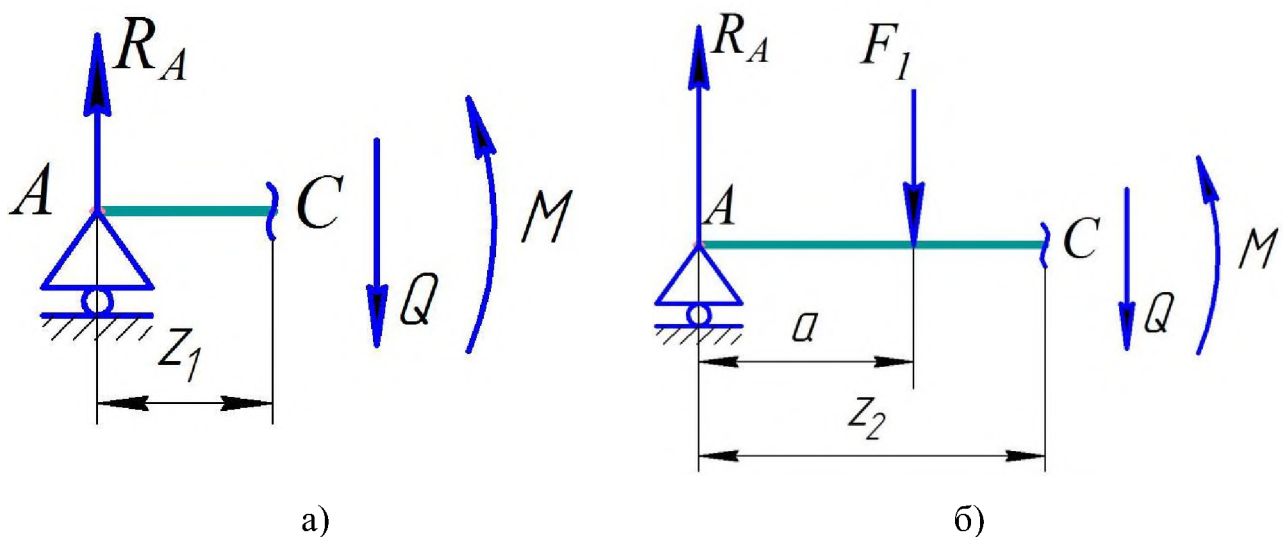


Рисунок 2.27 - Схемы к определению внутренних усилий в сечениях балки

Мысленно рассекаем балку на произвольном расстоянии z_1 от левой опоры. Отбрасываем одну из образовавшихся частей (например, правую) и заменяем ее действие на оставшуюся (левую) неизвестными усилиями (рис. 2.27, а). Поскольку при прямом изгибе все нагрузки лежат в одной плоскости xy (рис. 2.26), они не дают проекций на оси z , x и моментов относительно осей y и z . Следовательно, в сечениях балки будут возникать: поперечная сила - Q_y и изгибающий момент M_x . Индексы осей x и y при буквенных обозначениях изгибающего момента и поперечной силы указываться не будут. Для определения Q и M в рассматриваемом сечении составим два уравнения равновесия:

$$\sum y = 0; R_A - Q = 0, \text{ или } Q = R_A;$$

$$\sum M_C = 0; R_A z_1 - M = 0, \text{ или } M = R_A z_1,$$

где c – центр тяжести поперечного сечения балки на расстоянии z_1 от опоры A . Аналогично, рассмотрев сечение на расстоянии z_2 от левой опоры A (рис. 2.27, б) получим:

$$\sum y = 0; R_A - F - Q = 0, \quad Q = R_A - F;$$

$$\sum M_C = 0; R_A z_2 - F(z_2 - a) - M = 0, M = R_A z_2 - F(z_2 - a).$$

На основании полученных выражений можно сформулировать следующие правила для определения поперечной силы и изгибающего момента в поперечном сечении балки при изгибе.

1. Поперечная сила Q в произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону сечения, на нормаль к геометрической оси балки.

2. Изгибающий момент M в произвольном сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения относительно его центра тяжести.

В частном случае нагружения поперечная сила в сечениях балки может отсутствовать – тогда изгиб является чистым. Чаще всего, однако, в сечениях балки наряду с изгибающим моментом возникают и поперечные силы. Такой изгиб называется поперечным.

Правило знаков для поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Правило знаков обоих внутренних силовых факторов удобнее устанавливать, исходя из направления внешних нагрузок.

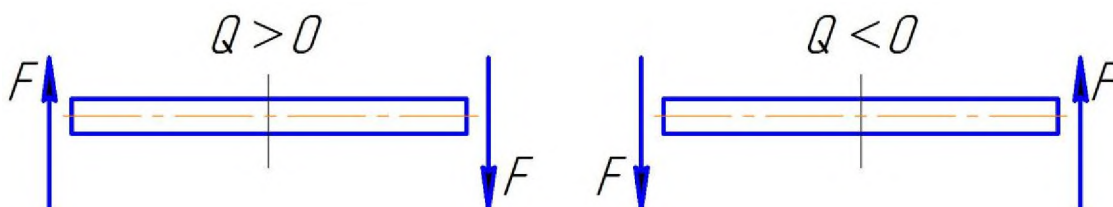


Рисунок 2.28 - Правило знаков для поперечных сил

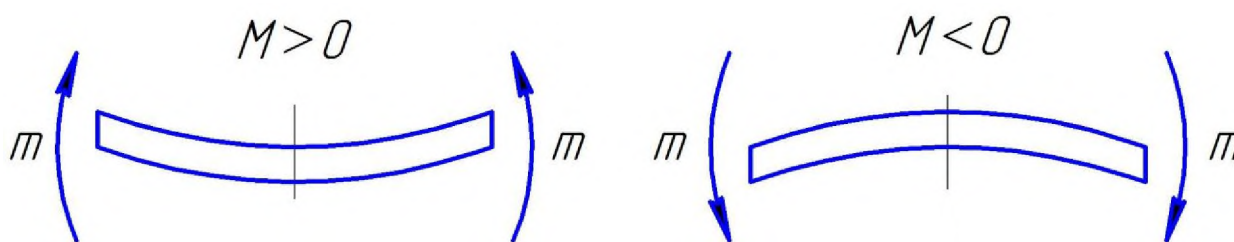


Рисунок 2.29 - Правило знаков для изгибающих моментов

Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом M , поперечной силой Q и интенсивностью распределенной нагрузки q

Укажем дифференциальные зависимости, связывающие изгибающий момент M , поперечную силу Q и интенсивность распределенной нагрузки q .

Двумя бесконечно близкими сечениями выделим из балки элемент длиной dz (рис. 2.30, а), на который действует распределенная нагрузка. Действие левой отброшенной части балки заменим поперечной силой Q и изгибающим моментом M , которые будем считать положительными (рис. 2.30, б). Аналогично поступим и с правой частью. Поскольку выделенный элемент бесконечно мал, нагрузку, распределенную по его длине, можно считать равномерной. В пределах элемента длиной dz сосредоточенные силы и моменты к балке не приложены. Поэтому значения внутренних силовых факторов Q и M , заменяющих действие правой отброшенной части балки, будут равны $Q + dQ$ и $M + dM$, (рис. 2.30, б), где dQ и dM – бесконечно малые величины.

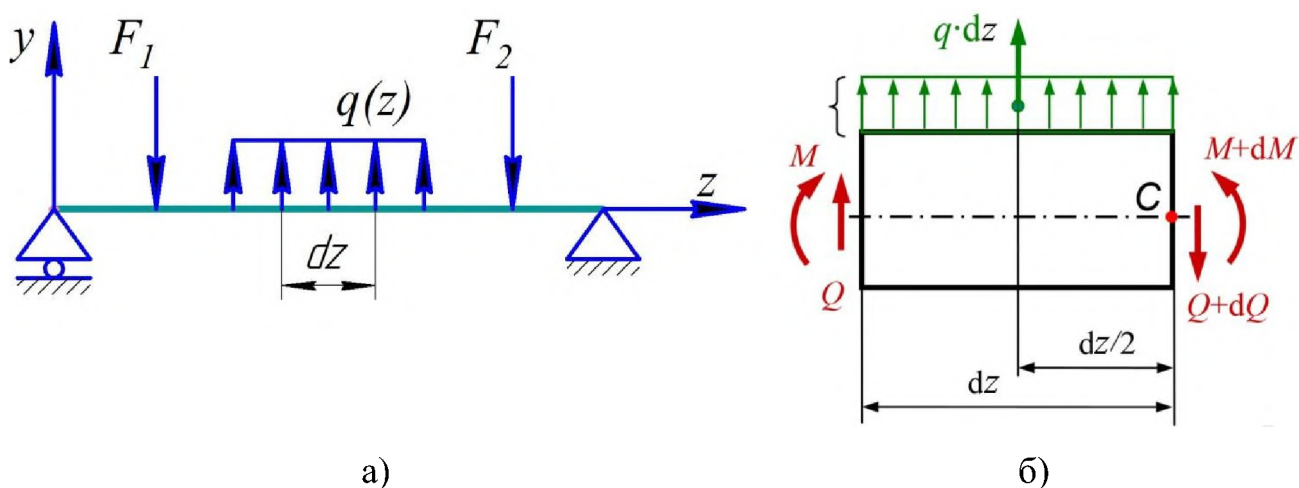


Рисунок 2.30 – Схема к определению дифференциальных зависимостей между M, Q, q

Запишем для выделенного элемента два уравнения равновесия:

- проекции всех сил на ось y :

$$\sum y = 0; \quad Q - (Q + dQ) + qdz = 0;$$

$$q = \frac{dQ}{dz};$$

- сумма моментов всех сил системы, находящихся слева от сечения, относительно т. С:

$$\sum M_c = 0; \quad M + Qdz + qdz \frac{dz}{2} - (M + dM) = 0.$$

Преобразовав, с учетом $q \frac{dz^2}{2} = 0$, получим

$$q = \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2}.$$

Правила проверки построения эпюр Q и M

Геометрический смысл первой производной некоторой функции – тангенс угла наклона касательной к кривой, отображающей эту функцию, и положительным направлением оси абсцисс. На основании полученных дифференциальных зависимостей при изгибе установлены следующие правила.

1. На участках, свободных от распределенной нагрузки, эпюра Q ограничена прямыми линиями, параллельными базовой (поперечная сила постоянна), а эпюра M – наклонными (изгибающий момент изменяется по линейному закону).

2. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра Q – наклонная прямая, а эпюра M – парабола выпуклостью в направлении действия нагрузки q .

3. В тех сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:

а) на эпюре Q будут скачки на величину и в направлении приложенных сил;

б) на эпюре M будут изломы, причем острие излома направлено по действию силы.

4. В сечении балки, где приложен сосредоточенный момент, эпюра M имеет скачок на величину этого момента. На эпюре Q действие пары сил не отражается.

5. На участках, где $Q > 0$, момент M возрастает, то есть положительные ординаты увеличиваются, отрицательные – уменьшаются. На участках, где поперечная сила Q отрицательна, момент M убывает.

6. В том сечении, где эпюра Q , изменяясь, пересекает базисную линию (поперечная сила $Q = 0$), изгибающий момент достигает экстремума (максимума или минимума). Касательная к линии, ограничивающей эпюру M в этом сечении, параллельна оси эпюры.

7. На концевой шарнирной опоре поперечная сила равна реакции этой опоры, а изгибающий момент равен нулю, если в опорном сечении не приложена пара сил.

8. В защемленном конце балки (заделке) значения Q и M равны опорной реакции и опорному моменту.

Лекция 11. Напряжения и деформации при чистом изгибе

При чистом изгибе в поперечном сечении балки возникает только изгибающий момент M_x , а поперечная сила $Q_y = 0$. Для тех участков однородной балки, где соблюдается это условие, $M_x = const$ и, следовательно, изменение кривизны будет одним и тем же. Таким образом, упругая линия однородной балки принимает форму дуги окружности. Для наглядного представления характера деформаций стержней при изгибе, а также для установления упрощающих предпосылок проведем следующий опыт. На боковые поверхности модели стержня из низкомодульного материала наносится сетка продольных и поперечных линий на равных расстояниях друг от друга (рис. 2.31, а).

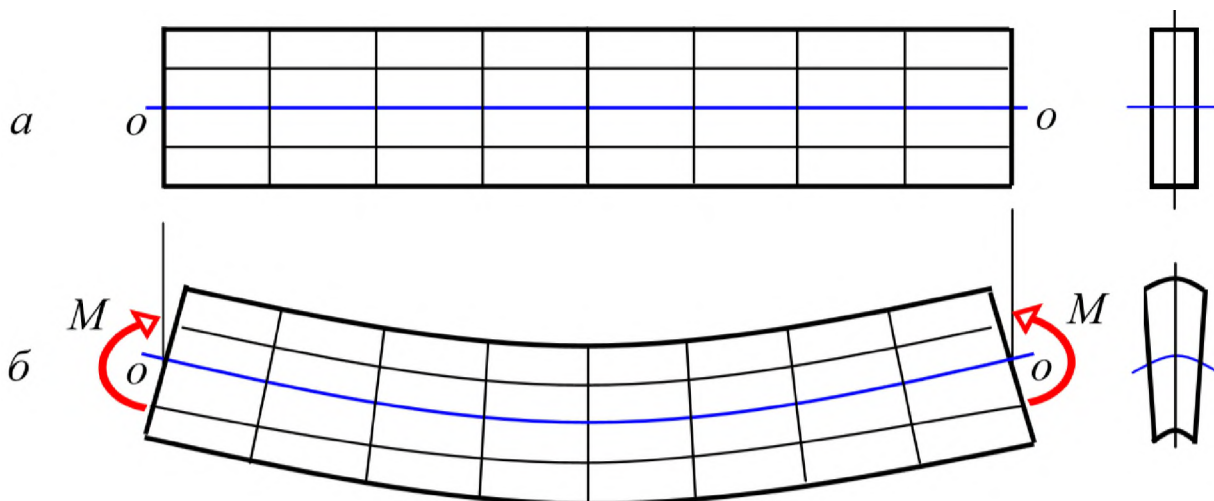


Рисунок 2.31 - Деформация балки при чистом изгибе: а – до приложения нагрузки; б – после приложения нагрузки.

При изгибе такого бруса двумя парами сил (M), приложенными по концам (рис. 2.31, б), можно видеть, что продольные линии искривляются по дуге окружности, причем расстояние между ними не меняется. У выпуклой

стороны бруса (снизу) эти волокна удлиняются, тогда как у вогнутой (сверху) – укорачиваются. Так как переход от удлинения к укорочению происходит непрерывно, то внутри бруса существует слой волокон, которые искривляются, но не меняют своей длины. Такой слой называется нейтральным слоем, а его след на плоскости сечения – нейтральной (нулевой) линией или осью (волокно $o-o$).

Деформации удлинения и укорочения обусловлены нормальными растягивающими напряжениями на выпуклой части балки, и сжимающими – на вогнутой. В нейтральном слое нормальные напряжения равны нулю ($\sigma_z = 0$). Поперечные же линии сетки, оставаясь прямыми и перпендикулярными к искривленным продольным линиям, только поворачиваются на некоторые углы по отношению к первоначальному положению (справедлива гипотеза плоских сечений).

Ортогональность продольных и поперечных линий до и после деформирования указывает также на отсутствие сдвигов, касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях балки.

Нормальные напряжения при чистом изгибе

В точках поперечных сечений балки внутренние изгибающие моменты вызывают нормальные напряжения, которые определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y,$$

где $M = M_z$ – абсолютное значение изгибающего момента в сечении, в котором определяются нормальные напряжения;

I_x – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

y – расстояние от нейтральной оси до исследуемого волокна.

Из уравнения следует, что величина нормальных напряжений меняется прямо пропорционально расстоянию y . Значит, напряжения распределены по высоте сечения по линейному закону: если $y = 0$ (на нейтральной оси), то $\sigma = 0$; если $y = y_{\max}$ (у поверхности балки), то $\sigma = \sigma_{\max}$.

Наибольшей величины напряжения достигают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси, т.е. в случае симметрии сечения при $y = y_{\max}$. Тогда:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_x} y_{\max}.$$

Осевой момент сопротивления при изгибе (размерность мм^3 , см^3 , м^3):

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}.$$

В итоге наибольшая величина напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}.$$

Значения осевых моментов сопротивления простых фигур:

прямоугольник - $W_x = \frac{bh^2}{6}$; круг - $W_x \approx 0,1d^3$.

Расчет на прочность при изгибе по нормальным напряжениям

Для проверки прочности материала балки по отношению к нормальным напряжениям необходимо записать условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} \leq \sigma_{adm},$$

где: $\sigma_{\max}$ — максимальное нормальное напряжение в опасном сечении балки. Условие прочности позволяет производить три вида расчета:

1. Проверку прочности балки;
2. Подбор размеров сечения:

$$W_x \geq \frac{M}{\sigma_{adm}};$$

3. Определение допускаемого изгибающего момента (по известным размерам поперечного сечения и σ_{adm}):

$$M_{adm} \leq W_x \sigma_{adm}.$$

Касательные напряжения при поперечном изгибе

Известно, что при чистом изгибе в поперечных сечениях балки возникают только нормальные напряжения, вызываемые единственным внутренним

усилием – изгибающим моментом M . В случае поперечного изгиба, когда в сечениях балки действует еще и поперечная сила Q , наряду с нормальными напряжениями σ в поперечных сечениях возникают и касательные напряжения τ . Под действием касательных напряжений при поперечном изгибе поперечные сечения балки искривляются.

Искривление поперечных сечений практически не отражается на деформациях продольных волокон балки. При выводе формулы касательных напряжений при поперечном изгибе русским ученым Д.И. Журавским были сделаны следующие допущения (гипотезы):

1. Направление касательных напряжений в сечении параллельно поперечной силе Q , которая является их равнодействующей.
2. Касательные напряжения, действующие по площадкам, расположенным на одинаковом расстоянии от нейтральной оси, равны между собой (т.е. $\tau = \text{const}$ по ширине сечения).

Касательные напряжения в сечениях балки при изгибе

С учетом вышеперечисленных гипотез Д.И. Журавским была получена формула для определения касательных напряжений в поперечных сечениях балки при изгибе:

$$\tau = \frac{QS_x^{\text{отсеч}}}{I_x b},$$

где: $Q = Q(z)$ – абсолютное значение поперечной силы в сечении, в котором определяются касательные напряжения;

$S_x^{\text{отсеч}}$ – статический момент площади отсеченной части поперечного сечения (т.е. сечения, лежащего выше или ниже исследуемого волокна) относительно нейтральной оси;

I_x – момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси;

b – ширина поперечного сечения балки на уровне, где определяют касательные напряжения.

Лекция 12. Расчет на прочность по касательным напряжениям

В ряде случаев, в особенности для деревянных балок, прочность проверяется по касательным напряжениям. Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{max} = \frac{QS_x^{\text{отсеч}}}{I_x b} \leq \tau_{adm},$$

где: τ_{adm} — максимальное касательное напряжение в опасном сечении балки.

Как и ранее рассмотренные условия прочности, неравенство позволяет производить три известных вида расчета:

1. Проверочный расчет прочности.
2. Подбор размеров сечения.
3. Определение допускаемой поперечной силы.

Как правило, для обычных балок, если материал удовлетворяет условию прочности по нормальным напряжениям, то и условие прочности по касательным напряжениям выполняется. Обычно, подобрав сечение балки из условия прочности по нормальным напряжениям, далее проверку прочности выбранного сечения производят по касательным напряжениям.

Задача. На стальную балку 1, лежащую на двух опорах 2 (рис. 2.32), действуют внешние нагрузки (силы F_1 и F_2 , а также изгибающий момент M_1).

Требуется:

1. Выполнить расчетную схему балки по заданным размерам в масштабе (рис. 2.34, а).
2. Определить реакции опор балки от действующих нагрузок.
3. Написать аналитические выражения изгибающего момента M для каждого расчетного участка балки.
4. Построить эпюры изгибающих моментов M с указанием численных значений ординат моментов.
5. По максимальному изгибающему моменту подобрать стальную балку прямоугольного поперечного сечения при допускаемом напряжении на изгиб $[\sigma_{изг}] = 120 \text{ МПа}$.

Исходные данные: $F_1 = 14 \text{ кН}$, $F_2 = 9 \text{ кН}$, $M = 4 \text{ кНм}$, $l = 2 \text{ м}$.

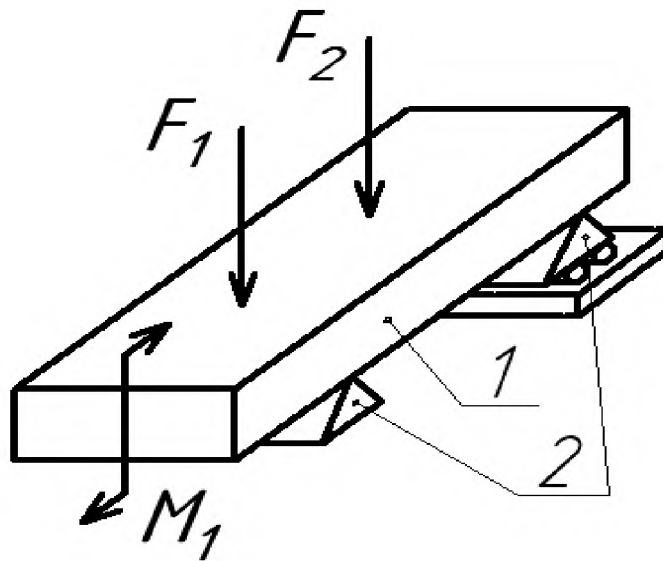


Рисунок 2.32 – Схема балки работающей на изгиб

Моментом силы относительно какой-либо точки называется произведение величины силы F (Н) на кратчайшее расстояние l (м) от данной точки до линии действия силы:

$$M = F \cdot l, \text{ Н} \cdot \text{м}$$

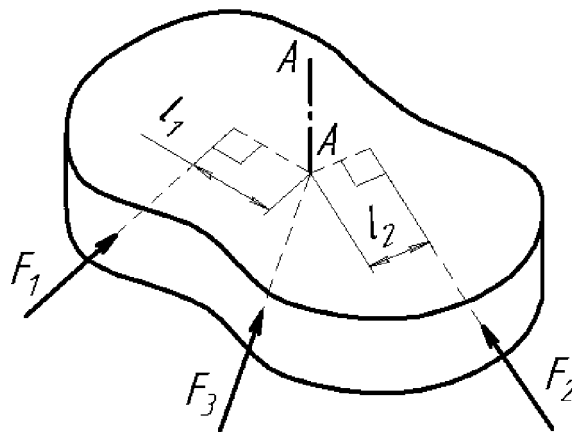


Рисунок 2.33 – Схема моментов сил

Если на тело (рис. 2.33) действует несколько сил (F_1, F_2, F_3), способных вращать тело вокруг какой-либо оси А-А, то момент от действия силы F_1 найдется по формуле:

$$M_1 = F_1 \cdot l_1, \text{ Н} \cdot \text{м}$$

где l_1 – кратчайшее расстояние от направления действия силы F_1 до данной оси вращения А-А.

Аналогично момент от силы F_2 :

$$M_2 = F_2 \cdot l_2, \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Момент от действия силы F_3 равен нулю, т.к. направление действия силы проходит через ось вращения А-А.

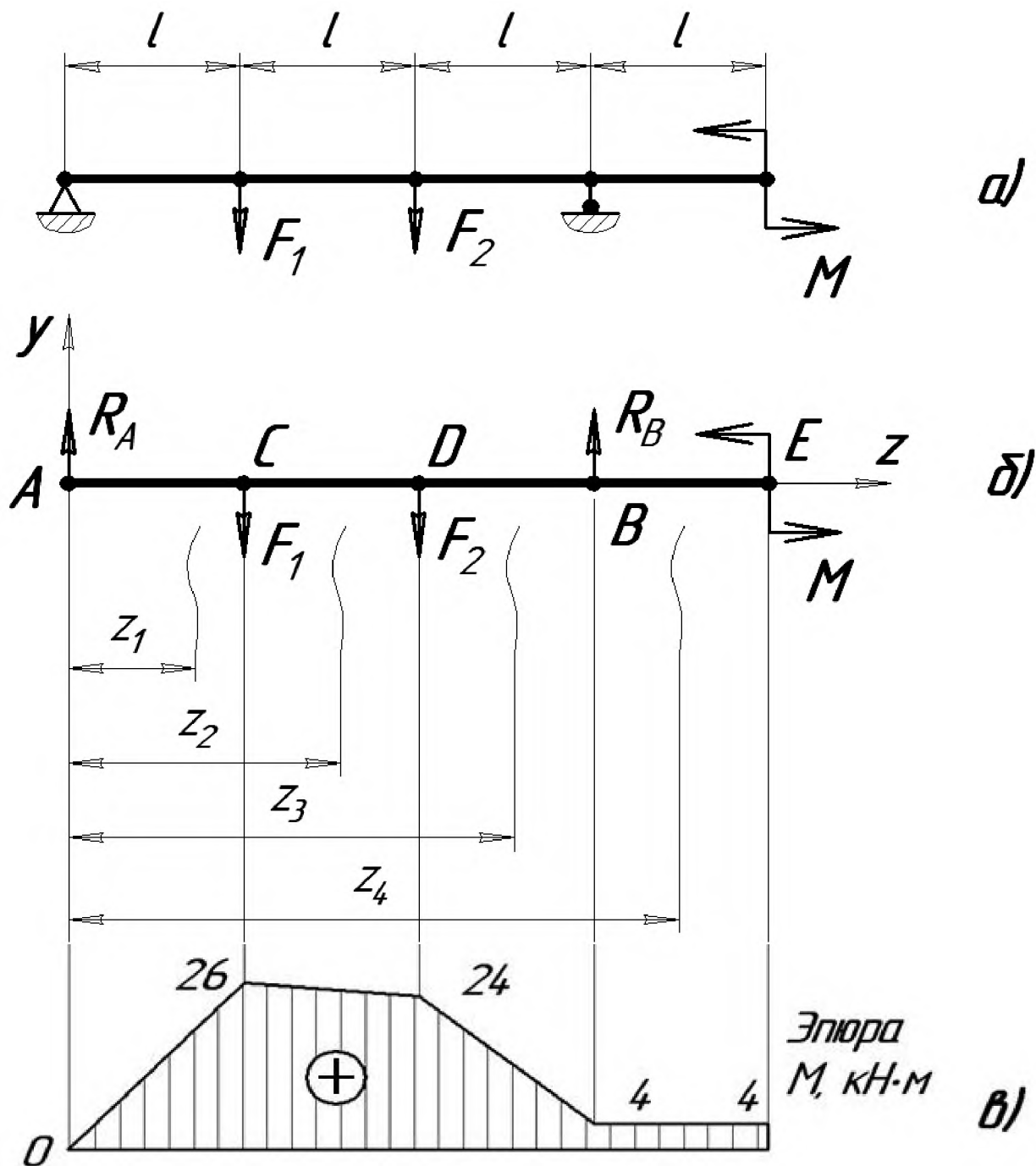


Рисунок 2.34 - Расчет двухопорной балки

При действии на балку внешних нагрузок в ее опорах возникают реакции (т.е. усилия), препятствующие перемещениям балки. Так как, внешние усилия

действуют вниз, предположим, что реакции опор R_A и R_B будут направлены вверх. Нанесем на схему реакции параллельно оси y (рис. 2. 34, б).

Определяем реакции опор балки от действующих на нее внешних нагрузок. Реакции определяем из условий равновесия в статике, т.е.:

$\sum M_A = 0$ (сумма всех изгибающих моментов сил относительно точки А равна нулю);

$\sum M_B = 0$ (сумма всех изгибающих моментов сил относительно точки В равна нулю).

Из первого условия получаем уравнение моментов сил:

$$\sum M_A = F_1 \cdot l + F_2 \cdot (l + l) - R_B \cdot (l + l + l) - M = 0$$

Из данного выражения определяем реакцию R_B в опоре В:

$$R_B = \frac{F_1 \cdot l + F_2 \cdot (l + l) - M}{l + l + l} = \frac{14 \cdot 2 + 9 \cdot (2 + 2) - 4}{6} = 10 \text{ кН}$$

Из второго условия получаем уравнение моментов сил:

$$\sum M_B = R_A \cdot (l + l + l) - F_1 \cdot (l + l) - F_2 \cdot l - M = 0$$

Из данного выражения определяем реакцию R_A в опоре А:

$$R_A = \frac{F_1 \cdot (l + l) + F_2 \cdot l + M}{l + l + l} = \frac{14 \cdot (2 + 2) + 9 \cdot 2 + 4}{6} = 13 \text{ кН}$$

Опорные реакции получились положительные, что свидетельствует о правильности выбранного для них направления. В случае получения реакции опор балки со знаком «минус» исправляем на схеме направление реакции на противоположное, а в расчетах значение реакции принимаем со знаком плюс.

Правильность определения значений реакций в опорах балки проверим по уравнению $\sum Y = 0$ (сумма всех действующих сил на ось Y равна нулю):

$$\sum Y = R_A + R_B - F_1 - F_2 = 0$$

$$\sum Y = 13 + 10 - 14 - 9 = 0$$

$$0 = 0.$$

Расчет реакций опор балки произведен верно. При проверке правильности определения реакций величина изгибающего балку момента M не учитывается.

Определяем изгибающие моменты, действующие на балку методом сечений. Балка имеет четыре расчетных участка, границами которых служат точки приложения внешних нагрузок:

I участок – от точки А до точки С;

II участок – от точки С до точки D;

III участок – от точки D до точки В;

IV участок – от точки В до точки Е.

Для I участка (от точки А до точки С): $0 \text{ м} \leq z_1 \leq 2 \text{ м}$ (где z_1 – текущая координата).

Величина изгибающего балку момента определяется лишь с учетом реакции в опоре А:

$$M_1 = R_A \cdot z_1, \text{ кНм.}$$

При $z_1 = 0 \text{ м}$ $M_1 = 0 \text{ кН}$

При $z_1 = l = 2 \text{ м}$ $M_1 = 13 \cdot 2 = 26 \text{ кНм.}$

Для II участка (от точки С до точки D): $2 \text{ м} \leq z_2 \leq 4 \text{ м.}$

Величина изгибающего балку момента определяется с учетом реакции в опоре А, а также изгибающего момента от действия силы F_1 :

$$M_2 = R_A \cdot z_2 - F_1 \cdot (z_2 - l), \text{ кНм.}$$

При $z_2 = 2 \text{ м}$ $M_2 = 13 \cdot 2 - 14 \cdot (2 - 2) = 26 \text{ кНм.}$

При $z_2 = 4 \text{ м}$ $M_2 = 13 \cdot 4 - 14 \cdot (4 - 2) = 24 \text{ кНм.}$

Для III участка (от точки D до точки В): $4 \text{ м} \leq z_3 \leq 6 \text{ м.}$

Величина изгибающего балку момента определяется с учетом реакции в опоре А, а также изгибающих моментов от действия сил F_1 и F_2 :

$$M_3 = R_A \cdot z_3 - F_1 \cdot (z_3 - l) - F_2 \cdot [z_3 - (l + l)], \text{ кНм.}$$

При $z_3 = 4 \text{ м}$ $M_3 = 13 \cdot 4 - 14 \cdot (4 - 2) - 9 \cdot [4 - (2 + 2)] = 24 \text{ кНм.}$

При $z_3 = 6$ м $M_3 = 13 \cdot 6 - 14 \cdot (6 - 2) - 9 \cdot [6 - (2 + 2)] = 4$ кНм.

Для IV участка (от точки В до точки Е): $6 \text{ м} \leq z_4 \leq 8 \text{ м}$.

Величина изгибающего балку момента определяется с учетом реакций в опорах А и В, а также изгибающих моментов от действия сил F_1 и F_2 (на данном расчетном участке):

$$M_4 = R_A \cdot z_4 - F_1 \cdot (z_4 - l) - F_2 \cdot [z_4 - (l + l)] + R_B \cdot [z_4 - (l + l + l)], \text{ кНм}$$

При $z_4 = 6$ м $M_4 = 13 \cdot 6 - 14 \cdot (6 - 2) - 9 \cdot [6 - (2 + 2)] +$
 $+ 10 \cdot [6 - (2 + 2 + 2)] = 4$ кНм

При $z_4 = 8$ м $M_4 = 13 \cdot 8 - 14 \cdot (8 - 2) - 9 \cdot [8 - (2 + 2)] +$
 $+ 10 \cdot [8 - (2 + 2 + 2)] = 4$ кНм

Т.е. в данном случае величина изгибающего балку момента постоянна и равна величине заданного изгибающего момента M .

По полученным числовым значениям изгибающих балку моментов строим эпюру изгибающих моментов (рис. 2.34, в).

Осуществляем подбор поперечного сечения балки.

Расчетным (опасным) сечением балки будет сечение, где возникает максимальный изгибающий момент. В данном случае максимальный изгибающий момент возникает в точке С (рис. 2.34, в), где $M_{\max} = 26$ кНм.

Сечение балки подбираем по условию прочности:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_{изг}} \leq [\sigma_{изг}], \text{ МПа}$$

где $W_{изг}$ – момент сопротивления изгибу балки, мм³. Тогда:

$$W_{изг} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma_{изг}]}, \text{ мм}^3.$$

Т.к. $M_{\max} = 26 \text{ кНм} = 26 \cdot 10^3 \text{ Нм} = 26 \cdot 10^6 \text{ Нмм}$, $[\sigma_{изг}] = 150 \text{ МПа}$, то

$$W_{изг} \geq \frac{26 \cdot 10^6}{150} \geq 173300 \text{ мм}^3.$$

Для балки прямоугольного сечения (рис. 2.35) момент сопротивления изгибу $W_{изг}$ вычисляется по формуле:

$$W_{изг} = \frac{b \cdot h^2}{6}, \text{ мм}^3,$$

где b – ширина балки (мм), h – высота балки (мм).

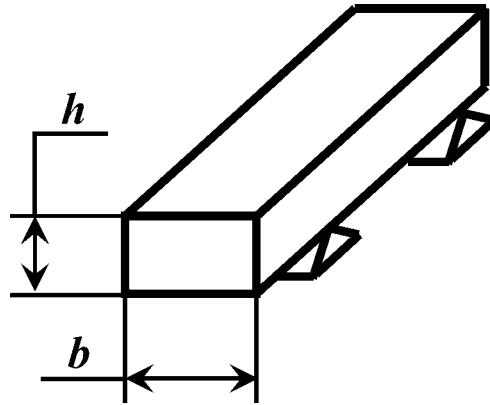


Рисунок 2.35 - Размеры поперечного сечения балки

Тогда:

$$b \cdot h^2 = 6 \cdot W_{изг} = 6 \cdot 173300 = 1039800 \text{ мм}^3.$$

Примем, например, ширину балки $b = 120$ мм. Тогда высота балки h будет равна:

$$h \geq \sqrt{\frac{1039800}{120}} \geq 93,08 \text{ мм}$$

Окончательно принимаем высоту балки $h = 100$ мм, ширину балки $b = 120$ мм. При таких размерах момент сопротивления изгибу $W_{изг}$ равен:

$$W_{изг} = \frac{120 \cdot 100^2}{6} = 200000 \text{ мм}^3.$$

Наибольшее действующее напряжение в балке будет равно:

$$\sigma = \frac{26000000}{200000} = 130 \text{ МПа.}$$

Значение $\sigma = 130$ МПа удовлетворяет условию $\sigma \leq [\sigma_{изг}] = 150 \text{ МПа}$.

Список используемой литературы

Рекомендуемая литература

1. Александров А.В., Сопротивление материалов (учебник) М.: В.Ш., 2008. 560 с.
2. Ахметзянов М.Х., Сопротивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2007. - 334 с.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М : Наука,1976.
4. Водопьянов, В. И. Курс сопротивления материалов с примерами и задачами : учеб.пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев ; ВолгГТУ. – Волгоград, 2012. – 136 с. ISBN 978-5-9948-1099-6.
5. Волков А.Н. ,Сопротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004.
6. Краткий курс лекций по сопротивлению материалов для студентов заочного факультета и заочного факультета ускоренного обучения / Сост. В. В. Иовенко. – Хабаровск: изд-во ТОГУ, 2011. – 100 с.
7. Прикладная механика. Учебное пособие для вузов. Под ред. В.М. Осецкого. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1977.
8. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 2000.

Содержание

	стр
Лекция 1. Основы сопротивления материалов	2
Лекция 2. Основные гипотезы и допущения	4
Лекция 3. Схематизация по опорным устройствам	7
Лекция 4. Понятие о напряжениях. Напряженное состояние в точке	12
Лекция 5. Растяжение сжатие. Напряжения и перемещения. Закон Гука	14
Лекция 6. Механические характеристики и свойства материалов	17
Лекция 7. Допускаемые напряжения и запасы прочности	26
Лекция 8. Сдвиг	34
Лекция 9. Кручение	37
Лекция 10. Прямой изгиб. Внутренние усилия	41
Лекция 11. Напряжения и деформации при чистом изгибе	49
Лекция 12. Расчет на прочность по касательным напряжениям	53
Список используемой литературы	60

